

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de Recherche Scientifique

Ecole Normale Supérieure, Kouba (Alger)

Département de Mathématiques



HABILITATION UNIVERSITAIRE

Présentée à l'Ecole Normale Supérieure de Kouba (Alger)

en :

Mathématiques

Option : Histoire des mathématiques

Par :

Anissa HARBILI

Maître de conférences (classe B)

E. N. S. Kouba (Alger)

Année universitaire: 2017-2018

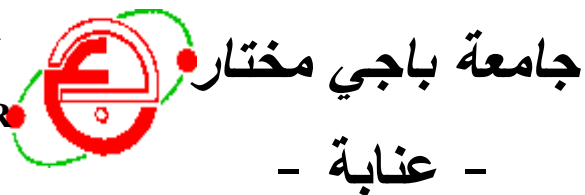
EXEMPLAIRE DE

THÈSE

DE DOCTORAT

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

BADJI MOKHTAR -ANNABA
UNIVERSITY
UNIVERSITE BADJI MOKHTAR
ANNABA



Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

THESE

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de
DOCTORAT

**LES PROCEDES D'APPROXIMATION
DANS LES OUVRAGES MATHÉMATIQUES
DU MAGHREB ET D'AL-ANDALUS (X^e – XV^e siècles) :**
Contribution à l'étude de la tradition mathématique de l'Occident musulman

Option : Histoire des mathématiques

Par : HARBILI Anissa

Sous la Direction du Professeur : DJEBBAR Ahmed

Le 25 avril 2012 à 10h

La salle Dic Av

Devant le jury :

PRESIDENTE	F. REBBANI	Prof.	U. B. M. ANNABA
EXAMINATRICE	E. AUSEJO	Prof.	U. ZARAGOZA
EXAMINATEUR	A. BOUZARI	M. C. A	E. N. S. K. ALGER
EXAMINATEUR	Y. GUERGOUR	M. C. A	E. N. S. K. ALGER
EXAMINATEUR	M. KOUCHE	M. C. A	U. B. M. ANNABA

A la mémoire de ma mère
A mon cher père

REMERCIEMENTS

Je tiens à exprimer toute ma gratitude et ma reconnaissance au Professeur Ahmed DJEBBAR (Université de Lille 1) qui m'a initiée à la recherche en histoire des mathématiques. Il a d'abord dirigé mon Magister puis il m'a proposé le sujet de cette thèse et a accepté d'en assurer la direction. Je le remercie pour sa patience, ses encouragements et pour ses précieux conseils durant toutes les années de préparation de ce travail.

Je tiens à remercier le Professeur Faouzia REBBANI (Université de Annaba) pour ses conseils, sa précieuse aide et aussi d'avoir accepté de présider le jury.

Mes remerciements vont également au Professeur Elena AUSEJO (Université de Zaragoza) pour l'aide qu'elle m'a fournie et surtout d'avoir accepté d'examiner mon travail.

Je remercie beaucoup messieurs Abdelmalek BOUZARI (E. N. S. K., Alger), Mahieddine KOUCHE (Université de Annaba) et Youcef GUERGOUR (E. N. S. K., Alger) qui ont bien voulu examiner mon travail et faire partie de ce jury.

Je remercie, enfin, tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

TRANSCRIPTION LATINE DES LETTRES ARABES

‘	ء	¼	ض	b ^a	با
b	ب	ð	ط	bñ	بو
t	ت	z	ظ	bì	بي
th	ث	ô	ع		
j	ج	gh	غ		
Ê	ح	f	ف		
kh	خ	q	ق		
d	د	k	ك		
dh	ذ	l	ل		
r	ر	m	م		
z	ز	n	ن		
s	س	h	هـ		
sh	ش	w	و		
î	ص	y	ي		

TABLE DES MATIERES

AVANT-PROPOS	1
I. INTRODUCTION	5
I-1. Présentation générale	6
I-2. Les procédés d'approximation dans les ouvrages de calcul de l'Orient musulman (IX ^e -XV ^e) siècles	8
I.2.1. Les procédés d'approximation des fractions dites sourdes	10
I.2.2. Les procédés d'approximation de la racine carrée, de la racine cubique et de la racine d'ordre supérieur	20
I.2.2.a. Les procédés d'approximation de la racine carrée d'un nombre	25
I.2.2.b. Les procédés d'approximation de la racine cubique d'un nombre	40
I.2.2.c. Les procédés d'approximation de la racine d'ordre supérieur d'un nombre	48
I-3. Les procédés d'approximation dans les ouvrages d'algèbre de l'Orient musulman : Exemple l'ouvrage d'• <i>Āl-Āsāl</i> (XII ^e s.)	51
I-4. Les procédés d'approximation dans certains ouvrages d'astronomie de l'Orient musulman	60
I-4.1. La détermination du côté de l'ennéagone régulier par al-Bīrūnī (XI ^e s.)	60
I-4.2. La résolution d'une équation trigonométrique par • <i>abash al-•^asib</i> (IX ^e s.)	68
I-4.3. La détermination de la valeur de $\sin 1^\circ$ par al-Kāshī (XV ^e s.)	69
II. LES PROCÉDES D'APPROXIMATION DANS LES OUVRAGES MATHÉMATIQUES DE L'OCCIDENT MUSULMAN	73
II-1. Introduction	74
II-2. Les procédés d'approximation dans <i>Fiqh al-Ēīs^{ab}</i> d'Ibn Munōim et <i>Kit^{ab} al-bay^{an} wa t-tadhk^{ar}</i> d'al-• <i>āī^r</i>	81
II-2.1. Les procédés d'approximation de la racine carrée d'un nombre entier	81
II-2.1.a. Préliminaires	81
II-2.1.b. Les formules d'approximation	85
II-2.2. Les procédés d'approximation de la racine carrée d'une fraction	93
II-2.3. Les procédés d'approximation de la racine cubique d'un nombre entier	93
II-2.3.a. Préliminaires	93
II-2.3.b. Les formules d'approximation	96
II-2.4. Le procédé d'approximation de la racine cubique d'une fraction	99
II-3. Les procédés d'approximation dans <i>Talkhī^{āt} al-Ēīs^{ab}</i> d'Ibn al-Bann ^a et dans certains de ses commentaires	101

II-3.1. Les procédés d'approximation dans le <i>Talkh</i> \hat{I} <i>aôm</i> aI <i>al-Êis</i> aB et le <i>Rafô al-Êij</i> aB <i>ôân wujñh aôm</i> aI <i>al-Êis</i> aB	102
II-3.1.a. Les procédés d'approximation de la racine carrée d'un nombre entier	103
II-3.1.b. Les procédés d'approximation de la racine carrée d'une fraction	108
II-3.1.c. Les procédés d'approximation de la racine cubique d'un nombre entier	109
II-3.2. Les procédés d'approximation dans certains commentaires du <i>Talkh</i> \hat{I} et du <i>Rafô al-Êij</i> aB	113
II-3.2.a. Les procédés d'approximation de la racine carrée d'un nombre entier	115
II-3.2.b. Les procédés d'approximation de la racine carrée d'une fraction	125
II-3.2.c. Les procédés d'approximation de la racine cubique d'un nombre entier	125
II-3.2.d. Les procédés d'approximation de la racine cubique d'une fraction	128
II-4. Les procédés d'approximation dans certains ouvrages du XIV ^e , du XV ^e et du XIX ^e siècles	129
II-4.1. Les formules d'approximation de la racine carrée d'un nombre entier	130
II-4.2. Les formules d'approximation de la racine carrée d'une fraction	134
II-3.3. Les formules d'approximation de la racine cubique d'un nombre entier	134
II-4.4. Les procédés d'approximation de la racine cubique d'une fraction	138
III. EDITION ET ANALYSE DE TEXTES	139
III-1. EDITION ET ANALYSE DES TEXTES INEDITS	140
III- 1. 1. Edition et analyse mathématique d'une section du <i>al-Bay</i> aB <i>wa at-tadhk</i> aB <i>fî ôilm mas</i> aB <i>al-Êis</i> aB d'al-• aîî aB	141
III- 1. 2. Edition et analyse mathématique d'une section du <i>Fiqh al-Êis</i> aB d'Ibn Munôim	148
III- 1. 3. Edition et analyse mathématique d'une section du • a \hat{D} an-niq aB baôda <i>rafô al- Êij</i> aB <i>ôân wujñh aôm</i> aI <i>al-Êis</i> aB d'Ibn Zakariyya ^a	163
III- 1. 4. Edition et analyse mathématique d'une section du <i>at-TamÊî</i> \hat{I} <i>fî</i> <i>sharÊ at-talkh</i> \hat{I} d'Ibn Haydñr	185
III- 1. 5. Edition et analyse mathématique d'une section du <i>TuÊfat a\hat{D}ill</i> aB <i>wa</i> <i>umniyat al-Êuss</i> aB <i>fî sharÊ m</i> aB <i>ashkala min Rafô al-Êij</i> aB d'Ibn Haydñr	206
III- 1. 6. Edition et analyse mathématique d'une section du <i>Takh</i> \hat{I} <i>ñl</i> \hat{I} <i>al-alb</i> aB <i>fî sharÊ talkh</i> \hat{I} <i>aôm</i> aI <i>al-Êis</i> aB d'al-Ghurbl	209
III- 1. 7. Edition et analyse mathématique d'une section du <i>Rashf ar-Ru</i> $\frac{1}{4}$ aB <i>min</i>	

<i>thughîr aôm^{al} al-Êis^{ab} d'al-Qaḏraw^{anî}</i>	219
III- 1. 8. Edition et analyse mathématique d'une section du <i>Ghunyat dhawî l-alb^{ab} d'al-Qalaî^{adî}</i>	236
III- 1. 9. Edition et analyse mathématique d'une section du <i>SharÊ al-Qalaî^{adî}</i> de MuÊammad Ibn Yñsuf aḏ-Êfayyesh	241
III-2. ANALYSE DES EXTRAITS DU <i>TALKH•SET DU RAFô AL-•IJ•B D'IBN AL-BANN•</i>	270
III-2. 1. Analyse mathématique d'une section du <i>TalkhÎ aôm^{al} al-Êis^{ab}</i> d'Ibn al-Bann ^a	271
III-2. 2. Analyse mathématique d'une section du <i>Rafô al-Êij^{ab} ôan wujñh aôm^{al} al-Êis^{ab}</i> d'Ibn al-Bann ^a	274
IV. ANNEXES	281
IV-1. ANNEXE 1	282
Les procédés d'approximations de la racine carrée d'un nombre dans la tradition mathématique mésopotamienne	282
IV-2. ANNEXE 2	287
Les procédés d'approximation de la racine carrée et de la racine cubique d'un nombre dans la tradition mathématique grecque	287
V. INDEX	292
Index des noms propres	293
VI. BIBLIOGRAPHIE GENERALE	298

AVANT-PROPOS

L'étude des procédés d'approximations dans la tradition mathématique de l'Occident musulman peut être réalisée uniquement à partir des manuscrits qui traitent de la science du calcul aujourd'hui disponibles. Les documents, nécessaires pour développer d'autres aspects de cette étude, sont encore inconnus. Dans le domaine de l'algèbre, par exemple, il y a très peu d'informations au sujet de la résolution des équations de degré supérieur ou égal à trois. A cela, nous ajoutons qu'aucun élément n'a été repéré, jusqu'à présent, concernant la résolution des équations trigonométriques.

Le travail que nous présentons comprend un exposé détaillé de tous les procédés d'approximation que nous avons repérés dans les ouvrages mathématiques, publiés en Occident musulman dans la période allant du X^e siècle au XV^e siècle et qui nous sont parvenus. Les formules d'approximation qui ont été énoncées dans un écrit du XIX^e siècle feront partie de cet exposé.

Ce travail contient aussi une édition des sections de certains ouvrages qui sont consacrées au calcul approché ainsi que l'analyse mathématique de leurs contenus. Les résultats d'une étude comparative ont été donnés au fur et à mesure de la présentation des procédés. Nous avons également fourni des témoignages indirects, issus seulement de cette étude comparative, sur la circulation de l'Orient vers l'Occident d'une partie de la tradition arabe du calcul indien. Ce phénomène n'est pas nouveau mais concernant notre sujet il est particulier car certaines méthodes d'approximation, qui ont été abandonnées par les mathématiciens de l'Orient, ont eu d'autres formulations plus intéressantes dans l'Occident.

Ces deux parties de notre travail sont précédées d'une introduction, dans laquelle nous avons fait une présentation des différents procédés d'approximation connus de la tradition mathématique de l'Orient musulman.

Les études récentes qui ont été réalisées autour de l'œuvre arithmétique d'al-Khwārizmī (m.850) et des travaux de Ḥabash al-Ḥāsib (IX^e s.), d'as-Samaw'al al-Maghribī (m. 1175), de Sharaf ad-dīne aṭ-Ṭūsī (XII^e s.) et d'al-Kāshī (m. 1429) ont été les éléments de base de l'exposé présenté dans cette introduction. Nous présentons aussi des procédés nouveaux à cette tradition. Certains ont été énoncés par Ya'ūsh Ibn Ibrāhīm al-Amawī (XIV^e s.) qui est d'origine andalouse mais qui a vécu à Damas. D'autres ont été exposés dans l'ouvrage d'Ibn

al-Majdī (m. 1447) qui est un traité sur l'arithmétique sexagésimale et qui s'intitule *Kashf al-ḥaqā'iq fī ḥisāb ad-daraj wa d-daqā'iq* [Dévoilement des vérités sur le calcul par les degrés et les minutes].

L'édition critique, que nous présentons, a été réalisée sur des fragments des textes mathématiques que nous avons utilisés dans notre étude sur les procédés d'approximation contenus dans les ouvrages mathématiques arabes du X^e siècle au XV^e siècle, publiés en Occident musulman. Ainsi qu'un fragment d'un ouvrage rédigé au XIX^e siècle. Parmi les neuf textes que nous avons choisis quatre sont déjà édités ou en voie de l'être. Nous allons les citer en les classant suivant les périodes de leur rédaction et en indiquant les folios que nous avons analysés :

La première catégorie comprend les écrits suivants :

1- Al-Ḥaṣṣār : *Kitāb al-Bayān wa t-tadhkār* [Le livre de la démonstration et du rappel], Ms. Rabat, B.G., n° 917Q, pp. 77-78¹.

2- Ibn Munōim : *Fiqh al-ḥisāb* [La science du calcul], Ms. Rabat, B.G., n° 416Q, pp. 410-417².

3- Ibn Haydūr : *Tuḥfat at-tullāb wa umniyat al-ḥussāb fī sharḥ mā ashkala min Rafō al-ḥijāb* [La parure des étudiants et le souhait des calculateurs sur l'explication des difficultés du Rafō al-ḥijāb], Ms. Vatican, n° 1403, ff. 39b-40a³.

Dans la deuxième catégorie, nous classons les commentaires du *Talkhīṣ* [L'Abrégé] d'Ibn al-Bannā (m. 1321) :

4- Ibn Zakariyyā : *Ḥaṭṭ an-niqāb baōda rafō al-ḥijāb ōan wujūh aōmāl al-ḥisāb* [Abaissement de la voilette après le lever du voile sur les formes des opérations du calcul], Ms. Tunis, B.N., n° 561, ff. 49a-60b.

5- Ibn Haydūr : *At-Tamḥīṣ fī sharḥ at-Talkhīṣ*, [(Livre) de la clarification sur le commentaire de l'Abrégé], Ms. Rabat, al-Hasaniya, n° 252, pp. 28-38⁴.

¹ - ZOUBEIDI, M. : *Kitāb al-bayān wa t-tadhkār d'al-Ḥaṣṣār* [Le livre de la preuve et du rappel d'al-Ḥaṣṣār], Magister en Histoire des Mathématiques, Alger, E. N. S. de Kouba, Magister en préparation.

² - HARBILI, A. : "Quelques procédés d'approximation dans les écrits mathématiques maghrébins des XIIe-XIVe siècles", *Actes du 7^{ième} colloque maghrébin sur l'histoire des mathématiques arabes*, (Marrakech, 30 mai – 1^{er} juin, 2002), Marrakech, E. N. S, Imprimerie al-Wataniya, 2005, vol 1, pp. 157-199. LAMRABET, D. : *Fiqh al-ḥisāb* [La science du calcul], Rabat, Dār al-amān, 2005.

6- Al-Ghurbī : *Takhṣīs ūlī l-albāb fī sharḥ Talkhīs aḥmāl al-ḥisāb* [Spécialisation des gens intelligents dans le commentaire de l'abrégé des opérations du calcul], Ms. Alger, B.N., n° 2712, ff. 100b-105a & Ms. Rabat, B.G., n°328D, pp. 420-429.

Dans la troisième catégorie, nous classons des écrits qui ont été rédigés dans des périodes différentes : le premier a été écrit au XIV^e siècle, le suivant au XV^e siècle et le dernier au XIX^e siècle. Ces ouvrages sont :

7- Al-Qaṭrawānī : *Rashf ar-ruḍāb min thughūr aḥmāl al-ḥisāb* [Succion du nectar des bouches des opérations du calcul], Ms. Rabat, B.G., n° 416Q, pp. 82-87, 102-105.

8- Al-Qalaṣādī : *Ghunyat dhawī l-albāb* [La richesse des gens intelligents], Ms. Alger, B. N., n° 3313, ff. 12b-13b.

9- Aṭ-Ṭfayyesh : *Sharḥ al-Qalaṣādī* [Commentaire (au livre) d'al-Qalaṣādī], Ms. Ghārdāya, Algérie, bibliothèque privée, banī yazguen, sans numéro, pp. 219-231.

Dans l'édition critique et l'analyse mathématique, nous avons adopté les conventions suivantes :

CONVENTIONS DE L'EDITION CRITIQUE

1- Les points diacritiques ont été rétablis sans être signalés dans l'édition.

2- L'écriture de certains mots a été actualisée sans avoir signalé les modifications.

3- Nous avons signalé le passage d'un folio à un autre ou d'une page à une autre ainsi :

// [52] indique le début du recto du 52^{ième} folio.

// [51ظ] indique le début du verso du 51^{ième} folio.

// [83] indique le début de la 83^{ième} page.

4- Dans le cas où une interprétation géométrique intervient dans une section parmi celles que nous avons éditées, nous avons choisi de reproduire les figures géométriques vers la fin du texte édité.

5- (...) le mot ou la phrase, inscrite entre les deux parenthèses, est ajouté au texte pour faciliter la lecture et par suite la compréhension du texte.

³ - MOSLIH, A. : *Tuḥfat aṭ-ṭullāb wa umniyat al-ḥussāb fī sharḥ mā ashkala min Rafō al-ḥijāb li Ibn Haydūr at-Tādīlī* [La parure des étudiants et le souhait des calculateurs sur l'explication des difficultés du Rafō al-ḥijāb d'Ibn Haydūr at-Tādīlī], Thèse de Doctorat, Rabat, Université Mohammed V, 2006.

⁴ - NIGHECH, J. : *At-Tamḥīṣ fī sharḥ at-Talkhīs d'Ibn Haydūr at-Tādīlī (m.816/ 1416)*, Etude philosophique, analyse mathématique et édition critique, Thèse de Doctorat en philosophie, Rabat, Université Mohamed V, Faculté des Lettres et des sciences Humaines, 2006-2007.

CONVENTIONS DE L'ANALYSE MATHÉMATIQUE

- 1- [...] contient un mot, une phrase ou une référence en vue de compléter un raisonnement ou d'en faciliter la compréhension.
- 2- Un segment de droite dont les extrémités sont les points, A et B , est représenté par AB .
- 3- La surface d'un quadrilatère $ABCD$ est représentée par (AC) où AC est sa diagonale.

I- INTRODUCTION

I-1 Présentation générale

La recherche des outils et des moyens, qui permettent de résoudre par approximation certains problèmes mathématiques et astronomiques, a représenté depuis le IX^e siècle le souci constant des spécialistes du calcul indien et aussi de certains auteurs d'ouvrages d'astronomie comme Ḥabash al-Ḥāsib (IX^e s.) et al-Kāshī (m.1429).

Les écrits, qui ont été publiés au neuvième siècle, contenaient déjà certains procédés d'approximation. L'ouvrage d'al-Khwārizmī (m.850), sur le calcul indien, et le Zīj de Ḥabash al-Ḥāsib, en astronomie, sont deux témoins d'un travail qui était orienté vers la recherche de méthodes pour approcher la valeur d'une solution d'un problème quand elle n'est pas exacte.

A partir du dixième siècle, l'intérêt pour développer d'autres méthodes s'est montré de plus en plus important et les résultats des premières recherches dans ce domaine étaient très significatifs. Plusieurs écrits ont été rédigés pour exposer de nouvelles procédures à la fois pour améliorer les approximations et pour résoudre d'autres problèmes. Abū l-Wafā (m. 998) s'est intéressé à celui qui répond aux besoins des commerçants de l'époque dans son ouvrage intitulé *Kitāb al-manāzil fī mā yaḥtāju ilayhī l-kuttāb wa l-ūmmāl min ōilm al-ḥisāb* [Livre des niveaux sur ce qui est nécessaire aux secrétaires et aux employés en science du calcul]. Dans ce traité, il a fait un exposé détaillé de quelques méthodes pour approcher la valeur des fractions du type $\frac{1}{n}$, n étant un nombre premier supérieur ou égal à dix.

Dans un autre ouvrage qui est intitulé *Kitāb fī mā yaḥtāju ilayhī aṣ-ṣāniō min aōmāl al-handasa* [Livre sur ce qui est nécessaire à l'artisan en constructions géométriques], il s'est intéressé aux problèmes de constructions géométriques pour les artisans. Il a proposé quelques méthodes pour, d'une manière approchée, les côtés de certaines figures géométriques comme l'heptagone régulier. Puis, dans son analyse sur une méthode de découpage, utilisée pour construire un carré à partir de trois carrés égaux, il a donné les valeurs approchées suivantes $\sqrt{300} \approx 17 + \frac{1}{3}$, $\sqrt{200} \approx 14 + \frac{1}{7}$. Abū l-Wafā n'a pas énoncé les formules, qui lui ont permis de donner ces valeurs, mais l'étude que nous allons présenter nous aidera à définir les procédés d'approximation qui permettent de retrouver ces résultats¹.

¹- ABŪ L-WAFĀ : *Kitāb fī mā yaḥtāju ilayhī aṣ-ṣāniō min aōmāl al-handasa* [Livre sur ce qui est nécessaire à l'artisan en constructions géométriques], Al-ōAlī, S. A. (éd.), Bagdad, Maṭba'at jāmi'at Baghdād, 1979, pp. 76, 147-148.

A partir du douzième siècle, les nouveaux outils, qui ont été introduits dans le domaine du calcul, ont donné naissance à des énoncés originaux complétant les anciens et permettant d'atteindre des résultats plus précis. Aussi, sur une durée qui s'est étendue jusqu'au XV^e siècle au moins, plusieurs ouvrages de calcul et d'algèbre ainsi que quelques épîtres de trigonométrie, qui contiennent une étude sur les approximations ou qui utilisent un calcul par approximation, ont été publiés. Certains d'entre eux nous sont parvenus.

Dans notre étude sur les procédés d'approximation en Orient musulman, nous avons utilisé des éditions qui remontent au siècle dernier –c'est-à-dire le XX^e siècle- et des analyses récemment réalisées. Même s'ils sont encore insuffisants, ces documents sont importants et indispensables. Ils nous ont permis de connaître les différents procédés d'approximation qui ont été utilisés en Orient. Ils nous ont aidés aussi à situer les périodes dans lesquelles des changements qualitatifs ont été apportés au calcul par approximation au niveau de la formulation et de la terminologie.

L'analyse de ces documents nous autorise à faire quelques remarques préalables sur un des aspects de ce calcul en Orient entre le IX^e siècle et le XV^e siècle. Tout d'abord, elle montre que ce sont essentiellement les ouvrages de calcul qui exposent ces méthodes. La présence du calcul approché a été moins intense dans ceux de l'algèbre et de la géométrie. Mais dans le domaine de l'astronomie, on peut admettre que le besoin d'évaluer des nombres fractionnaires ou des racines nième ou même des solutions des équations algébriques, intervenants dans certains calculs astronomiques, a certainement nécessité un recours au calcul approché. Mais les règles du calcul ne sont pas énoncées explicitement dans les ouvrages astronomiques. Quant à la trigonométrie, qui est issue des mathématiques et de l'astronomie, elle a contribué d'une manière remarquable dans le développement et l'élaboration de nouveaux procédés d'approximation. Une nouvelle méthode, basée sur le calcul par itération, caractérisera ces procédés et les distinguera des autres, établis dans le calcul indien.

Dans ce chapitre, nous présentons les différents procédés d'approximations qui ont été énoncés, explicitement, par les spécialistes du calcul indien et ceux qui ont été utilisés dans la résolution des problèmes d'algèbre, de géométrie et de trigonométrie. Cette présentation est divisée en deux parties. La première porte sur les procédés d'approximation dans les ouvrages de calcul. Nous distinguerons l'étude sur l'approximation des fractions de celle sur l'approximation de la racine nième. Quant à la deuxième, elle est entièrement consacrée aux procédés d'approximation élaborés pour résoudre des équations cubiques. Nous distinguerons les méthodes qui ont été exposées dans des ouvrages d'algèbre et montrerons qu'elles peuvent être généralisées et celles qui ont été proposées pour résoudre des problèmes de trigonométrie.

I-2. Les procédés d'approximation dans les ouvrages de calcul de l'Orient musulman (IX^e-XV^e) siècles

Les formules, que nous allons présenter, se trouvent dans les écrits mathématiques suivants : *Le calcul indien* d'al-Khwārizmī², lu à travers des traductions latines qui remontent au XII^e siècle ; les ouvrages de calcul du X^e siècles, comme *al-Fuṣūl fī l-ḥisāb al-hindī* [Les sections sur le calcul indien] d'al-Uqlīdisī (X^e s.)³, *at-Takmila fī l-ḥisāb al-hindī* [Le complément dans le calcul indien] d'al-Baghdādī (m. 1037)⁴, *Uṣūl ḥisāb al-hind* [Les fondements du calcul de l'Inde] de Kushyār Ibn Labbān al-Jīlī⁵ (m. 1024 env) et *al-Manāzil as-sabō* d'Abū l-Wafā⁶. Ainsi qu'*al-Kāfī fī l-ḥisāb* [(Le livre) suffisant dans le calcul] d'al-Karajī (m. 1029)⁷, *al-Qiwāmī fī l-ḥisāb* [Le Qiwāmī sur le calcul] d'as-Samaw'al (m. 1175), *ar-Risāla ash-shamsiyya fī l-uṣūl al-hīsābiyya* [L'épître solaire sur les fondements du calcul] d'an-Nīshābūrī (XIV^e s.)⁸ et *Miftāḥ al-ḥisāb* [La clef du calcul] d'al-Kāshī (m. 1429)⁹.

Nous présenterons, aussi, les formules d'approximation qui ont été exposées dans des ouvrages publiés en Orient mais dont le contenu s'inspire de la tradition mathématique de l'Occident musulman. Il s'agit particulièrement du *Marāsim al-intisāb fī ma'ālim al-ḥisāb*

² - ALLARD, A. : *Muḥammad Ibn Mūsā al-Khwārizmī, le calcul indien (Algorismus), Versions latines du XII^e siècle*, Bruxelles, Société des Etudes Classiques – Paris, Albert Blanchard, 1992.

³ - AL-UQLĪDISĪ : *Al-Fuṣūl fī l-ḥisāb al-hindī* [[Les sections sur le calcul indien], SAIDAN, A. S. (éd.), Alep, Université d'Alep, Institut d'Histoire des Sciences Arabes, 1985.

⁴ - AL-BAGHDĀDĪ : *At-Takmila fī l-ḥisāb al-hindī* [[Le complément dans le calcul indien], SAIDAN, A. S. (éd.), Koweït, manshūrāt ma'had al-makhtūṭāt al-ōarabiyya, 1985.

⁵ - IBN LABBĀN : *Uṣūl ḥisāb al-hind* [Les fondements du calcul de l'Inde], BAGHERI, M. (éd. & trad.) Téhéran, Scientific and Cultural Publications Company, 1988, (partie arabe). Yousckevitch a signalé qu'une traduction anglaise a été publiée dans : LEVY, M. & PETRUCK, M. : *Principles of Hindu reckoning*, Madisoh-Milwaukee, 1966. Voir YOUSCHKEVITCH, A. P. : *Les mathématiques arabes (VIIIe-XVe siècles)*, Traduction par M. Cazenaze et K. Jaouiche, Paris, Librairie Philosophique J. Vrin, 1976, p. 167, note 30.

⁶ - SAIDAN, A. S. : *Tārīkh ōilm al-ḥisāb al-ōarabī* [L'histoire de la science du calcul arabe], Partie 1 : *Ḥisāb al-yad* [Calcul digital], Ammān, Jamōiyyat ōummāl al-maṭābiō at-taōāwuniyya, 1971.

⁷ - AL-KARAJĪ : *Al-Kāfī fī l-ḥisāb* [Le livre suffisant en calcul], CHALHOUB, S. (éd.), Alep, Université d'Alep, Institut d'Histoire des Sciences Arabes, 1986.

⁸ - ABASSI, A. : *Le calcul de la racine n^{ième} d'un nombre chez al-Ḥasan an-Nīshābūrī (XIV^e siècle)*, Alger, Magister en histoire des mathématiques arabes, E. N. S. de Kouba, 2010.

⁹ - AL-KĀSHĪ : *Miftāḥ al-ḥisāb* [La clé du calcul], DAMIRDĀSH, A. S. & AL-ḤAFNĀWĪ, M. Ḥ. (éd.), Le Caire, Dār al-kitāb al-ōarabī, 1967. Saidan a fait un exposé commenté de certaines formules dans : SAIDAN, A. S. : *The Arithmetic of Al-Uqlīdisī*, Boston, Reidel Pub, 1978.

[Les honneurs de l'affiliation sur les signes du calcul] de Ya'ūsh Ibn Ibrāhīm al-Amawī¹⁰ et du *Kashf al-ḥaqā'iq fī ḥisāb ad-daraj wa d-daqā'iq* [Le dévoilement des vérités sur le calcul par les degrés et les minutes] d'Ibn al-Majdī¹¹.

Dans la plupart de ces ouvrages, deux chapitres importants ont été consacrés pour exposer le calcul par des méthodes d'approximation. Il s'agit du chapitre sur l'extraction de la racine carrée, de la racine cubique ou bien de la racine d'ordre supérieur d'un nombre. Et du chapitre sur les fractions. Les procédés d'approximation, qui ont été énoncés dans le premier chapitre, ont été introduits dans le but de compléter l'étude consacrée à la dernière opération arithmétique sur les entiers, qui est l'extraction des racines carrée, cubique ou d'ordre supérieur. Pour le second chapitre sur les fractions, il est important de signaler que certains ouvrages, parmi ceux que nous avons cités, contiennent à la fois des procédés d'approximation des racines carrée, cubique et parfois même d'ordre supérieur des nombres fractionnaires et des méthodes pour convertir des fractions.

La conversion est une opération qui consiste à exprimer une fraction en fonction d'autres fractions. Celle qui nous intéresse dans ce travail utilise des techniques de calcul, qui ne sont pas toujours justifiées ou même signalées, et vise à attribuer des valeurs approchées à des fractions qui sont irréductibles. L'étude qu'Abū l-Wafā a présentée sur ce sujet est remarquable. Elle révèle un des aspects importants du calcul par approximation du point de vue théorique et pratique.

Nous allons présenter ces différents procédés d'approximation en commençant par ceux qui ont été exposés par Abū l-Wafā dans le but de calculer des valeurs approchées des fractions dites *sourdes*¹². Ensuite, nous exposerons la méthode d'as-Samaw'al, qui utilise les fractions décimales pour résoudre le même problème.

Nous poursuivrons notre exposé avec des formules d'approximation de la racine nième des nombres entiers et fractionnaires.

¹⁰ - AL-AMAWĪ : *Marāsīm al-intisāb fī ma'ālim al-ḥisāb* [Les honneurs de l'affiliation sur les signes du calcul], SAIDAN, A. S. (éd.), Alep, Université d'Alep, Institut d'Histoire des Sciences Arabes, 1981.

¹¹ - IBN AL-MAJDĪ : *Kashf al-ḥaqā'iq fī ḥisāb ad-daraj wa d-daqā'iq* [Le dévoilement des vérités sur le calcul par les degrés et les minutes], Ms. Alger, Bibliothèque Nationale, n° 1456.

¹² - Dans la terminologie arabe, on utilise l'expression *kusūr ṣammā'*. Une fraction est dite sourde lorsque son dénominateur est un nombre supérieur à 10. Nous signalons qu'al-Kāshī a utilisé l'expression « *kasr mujarrad* » pour nommer tout types de fractions. Voir AL-KASHĪ : *Miftāḥ al-ḥisāb*, op. cit., p. 78.

I.2.1. Les procédés d'approximation des fractions dites *sourdes*

Dans tous les ouvrages mathématiques de l'Orient et de l'Occident musulmans, les fractions dites *exprimables*¹³ ont été distinguées d'un autre type de fractions appelées *sourdes*. Aussi, dans le but de nommer une fraction, des règles ont été élaborées pour l'exprimer en fonction d'autres fractions, choisies selon la nature du problème posé. En Occident musulman, c'est la présence du chapitre sur la conversion des fractions qui témoigne de l'intérêt de ce problème. La formule qui a été proposée pour le résoudre a été exprimée comme suit : $f_1 = k.f_2$, f_1 étant la fraction qu'on veut convertir en $f_2 = \frac{1}{n}$, $n \geq 2$. k est le nombre obtenu par le produit $(n.f_1)$ ¹⁴.

La même formule a été proposée en Orient. Al-Kāshī a, en plus, signalé que le principe de cette formulation repose sur la notion de proportionnalité de quatre nombres¹⁵.

Quant à Abū l-Wafā, il s'est particulièrement intéressé aux procédés permettant d'attribuer des valeurs approchées à certains types de fraction *sourde*. Le problème qu'il s'est proposé de résoudre, consiste à écrire une fraction, donnée, comme somme et produit de fractions dont le numérateur est égal à 1 et le dénominateur variant dans l'ensemble $\{2, 3, \dots, 10\}$. Dans la section, que nous avons analysée, il a aussi utilisé des termes liés au système monétaire qui était en usage dans l'Asie centrale, comme le *dāniq*¹⁶.

Dans son étude sur les fractions, al-Kāshī a fait une description des différentes opérations sur les trois unités : $1dāniq = \frac{1}{6}$ dinars, $1ṭasūj = \frac{1}{24}$ dinars et $1shaṭra = \frac{1}{96}$ dinars. Il a exposé une méthode pour convertir une fraction simple¹⁷ -qu'on écrit actuellement sous la forme $\frac{m}{n}$, $m < n$ et $(m, n) = 1$ - qu'il a exprimée en fonction des trois unités citées, en fraction

¹³- Dans la terminologie arabe, on utilise l'expression *kusūr munṭaqa*. Une fraction *exprimable* est une fraction dont le dénominateur (posé toujours plus grand que le numérateur) est un nombre qui est compris entre 2 et 10.

¹⁴- Al-ḥUqbānī a fait une description détaillée de ce principe. Voir HARBILI, A. : *L'enseignement des mathématiques à Tlemcen à travers le commentaire d'al-ḥUqbānī*, Magister d'Histoire des Mathématiques, E. N. S. d'Alger, 1997, p. 119, 322.

¹⁵- AL-KĀSHĪ : *Miftāḥ al-ḥisāb*, op. cit., p. 98.

¹⁶- *Dawāniq* est le pluriel de *dāniq*. Il est utilisé par les peuples d'Asie centrale et de l'Iran comme une unité de monnaie représentant le $\frac{1}{6}$ du dinar ou du dirham. YOUSCHKEVITCH, A. P. : *Les mathématiques arabes (VIII^e-XV^e siècles)*, op. cit., p. 33.

¹⁷- Al-Kāshī a utilisé le terme *mufrada* pour ce type de fraction. Mais avant lui, al-Baghdādī a utilisé le mot *munfarid*. Voir AL-BAGHDĀDĪ : *At-Takmila fī l-ḥisāb al-hindī*, op. cit., p.102.

sexagésimale ou en fraction décimale et inversement¹⁸. Al-Kāshī a signalé dans son étude que certains spécialistes du calcul, sans préciser leurs noms, ont négligé des fractions dans leurs calculs lorsque la nécessité l'exigeait. Lui même a négligé des fractions dans certains calculs. Pour le signaler, il a utilisé les expressions suivantes : « ... *et on a laissé le reste* » et « ...*et quatre cinquième de shaṭra par approximation* »¹⁹.

Parmi les mathématiciens qui ont utilisé l'idée de négliger certaines fractions dans leurs calculs, nous citons as-Samaw'al al-Maghribī qui a proposé une méthode pour écrire des fractions *sourdes* comme somme de fractions décimales. Il a aussi précisé qu'à travers ce procédé on peut calculer des valeurs approchées avec la précision que l'on veut. Son prédécesseur kushyār Ibn Labbān avait signalé le cas où le résultat de la division d'un entier par un autre comporte une partie fractionnaire. Et il a proposé de calculer une valeur approchée de la fraction en divisant le produit de son numérateur par 60 par le dividende. Puis, en répétant cette opération sur le reste de cette dernière division, Ibn Labbān a déclaré que le résultat final sera donné en fonction du *fals de dirham* ou bien du *fals de fals de dirham* et ainsi de suite. Il a évoqué aussi son expression en *minute de degré* ou bien en *secondes de minutes de degré* et ainsi de suite. Il n'a pas utilisé la notion d'approximation lorsqu'il a décrit le processus dans la base décimale. Mais lorsqu'il a exposé l'opération dans la base sexagésimale, il a adopté l'expression d'*affinement de l'approximation*²⁰.

Nous allons présenter les différentes méthodes d'approximation qu'Abū l-Wafā a utilisées dans le deuxième chapitre de son ouvrage *al-manāzil as-sabō* qu'il a intitulé *fī maḥrifat nisab al-aḥdād aṣ-ṣumm bi t-taqrīb* [sur la manière de connaître les rapports des nombres sourds par approximation]²¹. Nous exposerons au fur et à mesure les résultats de notre analyse des différentes étapes de son étude. Nous terminerons avec un exposé sur la méthode qu'as-Samaw'al a proposée dans le seizième chapitre du cinquième Livre de son ouvrage *al-Qiwāmī fī l-ḥisāb al-hindī*.

¹⁸- AL-KĀSHĪ : *Miftāḥ al-ḥisāb*, op. cit., pp. 79, 99-102, 127- 128.

¹⁹- Op. cit., pp. 126-127.

²⁰- IBN LABBĀN : *Uṣūl ḥisāb al-hind*, op. cit., p. 78, 90.

²¹- SAIDAN, A, S. : *Tārīkh ʿilm al-ḥisāb al-ʿarabī* [L'histoire de la science du calcul arabe], op. cit., p. 116.

Les méthodes d'Abū l-Wafā²²

Le problème qu'Abū l-Wafā al-Buzjānī s'est proposé de résoudre est le suivant :

Ecrire une fraction du type $\frac{a}{b}$, $a < b$, b étant un nombre premier plus grand que 10, sous forme d'une somme et produit de fractions *exprimables*²³.

Pour cela, il s'est servi de la fraction $\frac{3}{17}$ pour expliciter le procédé d'approximation, qu'il a proposé à la place de celui qui était en usage. Mais avant de présenter son étude, nous exposons la méthode égyptienne pour la décomposition de cette fraction en quantième pour mieux situer le problème :

$$\begin{aligned}\frac{3}{17} &= \frac{1}{17} + \left(\frac{1}{17} + \frac{1}{17} \right) \\ &= \frac{1}{17} + \left(\frac{1}{17} + \frac{1}{34} + \frac{1}{68} + \frac{1}{136} + \frac{1}{272} + \frac{1}{272} \right) \\ &= \frac{1}{16} + \frac{1}{17} + \frac{1}{34} + \frac{1}{68} + \frac{1}{136} + \frac{1}{272}\end{aligned}$$

Nous remarquons que cette décomposition peut être généralisée puisque aucune condition n'est posée sur les dénominateurs des quantième²⁴.

Le problème d'Abū l-Wafā est posé d'une manière similaire mais avec une contrainte sur les dénominateurs des quantième. Son idée consiste à décomposer $\frac{3}{17}$ en somme de fractions $\frac{1}{b}$ tel que b soit un produit de facteurs compris entre 2 et 10. Un calcul par approximation s'impose pour résoudre ce problème car 17 est un nombre premier.

La première méthode

$$\frac{3}{17} = \frac{1}{60} \left(\frac{3 \cdot 60}{17} \right) = \frac{1}{60} \left(10 + \frac{10}{17} \right)$$

²²- Pour présenter l'analyse des méthodes d'Abū l-Wafā, nous avons utilisé l'édition de Saidan : SAIDAN, A. S. : *Tārīkh ʿilm al-ḥisāb al-ʿarabī* [L'histoire de la science du calcul arabe], op. cit., pp. 116-119.

²³- Youschkevitch a signalé que pour Abū l-Wafā la valeur des dénominateurs des fractions exprimables ne dépasse pas le nombre 7. Voir YOUSCHKEVITCH, A. P. : *Les mathématiques arabes (VIII^e-XV^e siècles)*, op. cit., p. 29.

²⁴- Parmi les ouvrages dans lesquels a été exposée cette méthode nous citons : BOYER, C. B. : *A History of Mathematics*, New Jersey, Princeton University Press, 1985, pp. 14-15.

Comme $10 > \frac{1}{2}(17)$ nous pouvons attribuer à la fraction $\frac{10}{17}$ la valeur 1 et avoir

l'approximation : $10 + \frac{10}{17} \approx 11$.

D'où $\frac{3}{17} \approx \frac{11}{60} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \left(\frac{1}{10} \right)$.

Calculons alors $17 \cdot \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6} \left(\frac{1}{10} \right) \right)$:

$$17 \cdot \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6} \left(\frac{1}{10} \right) \right) = 3 + \frac{7}{6} \left(\frac{1}{10} \right) = 3 + \frac{1}{10} + \frac{1}{6} \left(\frac{1}{10} \right) \quad ^{25}.$$

Ainsi, l'erreur est par excès et vaut $\frac{1}{10} + \frac{1}{6} \left(\frac{1}{10} \right)$

La première valeur approchée est $x_1 = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \left(\frac{1}{10} \right)$

Affinement de l'approximation²⁶

D'après les calculs précédents, nous avons $\frac{3}{17} = \frac{1}{60} \left(10 + \frac{10}{17} \right)$

$$10 + \frac{10}{17} = 10 + \frac{1}{60} \left(\frac{10 \cdot 60}{17} \right) = 10 + \frac{1}{60} \left(35 + \frac{5}{17} \right)$$

Mais comme $5 < \frac{1}{2} \cdot 17$ nous attribuons la valeur 0 à la fraction $\frac{5}{17}$.

Ainsi : $\frac{3}{17} \approx \frac{1}{60} \left(10 + \frac{35}{60} \right)$

$$\frac{3}{17} \approx \frac{1}{60} \left(10 + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{10} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{9} \right) + \frac{1}{6} \left(\frac{1}{8} \right)$$

²⁵- Dans l'édition que nous avons utilisée, le résultat de cette opération a été donné égal à trois et sept dixième.

²⁶- Abū l-Wafā n'a pas utilisé l'expression *tadqīq at-taqrīb* qui est connue en Occident musulman et que M. Souissi a traduit par [raffinement de l'approximation]. Mais, il a proposé de chercher une solution plus précise en s'exprimant ainsi « Et si nous voulons que [la valeur] soit plus proche que celle-ci... ». SAIDAN, A. S. : *Tārīkh ʿilm al-ḥisāb al-ʿarabī*, op. cit., p. 117.

$$\text{Avec } \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{9} \right) + \frac{1}{6} \left(\frac{1}{8} \right) \right) \cdot 17 = 2 + \frac{9}{10} + \frac{2}{3} \left(\frac{1}{10} \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{10} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{9} \left(\frac{1}{10} \right) \right) + \frac{1}{8} \left(\frac{1}{9} \left(\frac{1}{10} \right) \right) \quad ^{27}.$$

La deuxième valeur approchée $x_2 = \frac{1}{10} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{9} \right) + \frac{1}{6} \left(\frac{1}{8} \right)$ est plus précise que la première.

Nous pouvons répéter le procédé sur le dernier reste de la division, qui est 5, pour avoir une autre valeur plus précise :

$$10 + \frac{1}{60} \left(35 + \frac{5}{17} \right) = 10 + \frac{1}{60} \left(35 + \frac{1}{60} \left(\frac{300}{17} \right) \right)$$

$$10 + \frac{1}{60} \left(35 + \frac{1}{60} \left(\frac{300}{17} \right) \right) = 10 + \frac{1}{60} \left(35 + \frac{1}{60} \left(17 + \frac{11}{17} \right) \right)$$

$$\text{Mais, comme } 11 > \frac{1}{2} \cdot 17 \text{ alors } \frac{3}{17} \approx \frac{1}{60} \left(10 + \frac{1}{60} \left(35 + \frac{18}{60} \right) \right)$$

$$\text{D'où la troisième valeur approchée } x_3 = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{10} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{6} \left(\frac{1}{6} \left(\frac{1}{10} \right) \right) \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{6} \left(\frac{1}{10} \left(\frac{1}{10} \left(\frac{1}{10} \right) \right) \right) \right)$$

La généralisation du procédé²⁸

Nous pouvons généraliser cette méthode comme suit :

Soit la fraction $\frac{a}{b}$, $a < b$ et b étant un nombre premier plus grand que 10.

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{60} \left(\frac{a \cdot 60}{b} \right) = \frac{1}{60} \left(a_1 + \frac{r_1}{b} \right) \text{ [avec } a \cdot 60 > b \text{]}$$

$$\text{Si } r_1 > \frac{b}{2} \text{ on pose } \frac{r_1}{b} \approx 1 \text{ et on obtient } \frac{a}{b} \approx \frac{a_1 + 1}{60}$$

$$\text{Si } r_1 < \frac{b}{2} \text{ on pose } \frac{r_1}{b} \approx 0 \text{ et on obtient } \frac{a}{b} \approx \frac{a_1}{60}$$

Ainsi la première valeur approchée de la fraction $\frac{a}{b}$ est :

²⁷ - L'auteur a donné le résultat suivant « deux et cinq dawānīq et neuf dixième et deux-tiers et un-quart ».

²⁸ - En guise de généralisation, Abū l-Wafā s'est exprimé comme suit : *Et de la même manière il faudra procéder pour tous les nombres sourds restants*. SAIDAN, A. S. : *Tārīkh ōlm al-ḥisāb al-ārabī*, op. cit., p. 118.

$$x_1 = \frac{r_1 + 1}{60} \quad \text{ou bien} \quad x_1 = \frac{r_1}{60} \quad \text{selon les cas.}$$

Nous répétons ce procédé sur le reste r_1 pour avoir une deuxième valeur plus proche :

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} &= \frac{1}{60} \left(a_1 + \frac{r_1}{b} \right) = \frac{1}{60} \left(a_1 + \frac{1}{60} \left(\frac{r_1 \cdot 60}{b} \right) \right) \\ &= \frac{1}{60} \left(a_1 + \frac{1}{60} \left(a_2 + \frac{r_2}{b} \right) \right) \end{aligned} \quad [\text{avec } r_1 \cdot 60 > b]$$

$$\text{Si } r_2 > \frac{b}{2} \quad \text{on pose} \quad \frac{r_2}{b} \approx 1 \quad \text{et on obtient l'approximation} \quad \frac{a}{b} \approx \frac{1}{60} \left(a_1 + \frac{a_2 + 1}{60} \right)$$

$$\text{Si } r_2 < \frac{b}{2} \quad \text{on pose} \quad \frac{r_2}{b} \approx 0 \quad \text{et on obtient l'approximation} \quad \frac{a}{b} \approx \frac{1}{60} \left(a_1 + \frac{a_2}{60} \right)$$

$$\text{La deuxième valeur approchée est alors } x_2 = \frac{1}{60} \left(a_1 + \frac{a_2 + 1}{60} \right) \quad \text{ou bien} \quad x_2 = \frac{1}{60} \left(a_1 + \frac{a_2}{60} \right)$$

selon les cas décrits.

Nous continuons à écrire la fraction sous forme :

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{60} \left(a_1 + \frac{1}{60} \left(a_2 + \frac{1}{60} \left(\frac{r_2 \cdot 60}{b} \right) \right) \right) = \frac{1}{60} \left(a_1 + \frac{1}{60} \left(a_2 + \frac{1}{60} \left(a_3 + \frac{r_3}{b} \right) \right) \right)$$

Pour obtenir une troisième valeur :

$$x_3 = \frac{1}{60} \left(a_1 + \frac{1}{60} \left(a_2 + \frac{a_3 + 1}{60} \right) \right) \quad \text{si } r_3 > \frac{b}{2}$$

ou bien

$$x_3 = \frac{1}{60} \left(a_1 + \frac{1}{60} \left(a_2 + \frac{a_3}{60} \right) \right) \quad \text{si } r_3 < \frac{b}{2}$$

Et ainsi de suite, nous poursuivons en multipliant le reste de la division $((a_i \cdot 60) \div b)$ par 60 et en divisant le résultat par b .

Ainsi, pour tout i la valeur approchée de la fraction est donnée comme suit :

$$\frac{a}{b} \approx a_1 60^{-1} + a_2 60^{-2} + \dots + a_i 60^{-i} \quad \text{si } r_{i+1} < \frac{b}{2}$$

$$\frac{a}{b} \approx a_1 60^{-1} + a_2 60^{-2} + \dots + (a_i + 1) 60^{-i} \quad \text{si } r_{i+1} \geq \frac{b}{2}$$

La deuxième méthode²⁹

$$\frac{a}{b} \approx \frac{a+u}{b+u}$$

Remarques

1- Lorsque $u = 1$ alors $\frac{a}{b} \approx \frac{a+1}{b+1}$. Mais, cette valeur n'est pas précise.

2- Pour $0 < u < 1$, nous appliquons la formule ci-dessus sur la fraction $\frac{r_i}{b}$, obtenue à

une étape i en utilisant la première méthode, comme suit : $\frac{r_i}{b} \approx \frac{r_i + \frac{1}{n}}{b + \frac{1}{n}}$.

Ainsi on obtient l'approximation suivante :

$$\frac{a}{b} \approx \frac{1}{60} \left(a_1 + \frac{1}{60} \left(a_2 + \frac{1}{60} \left(a_3 \dots + \frac{1}{60} \left(a_i + \frac{r_i + \frac{1}{n}}{b + \frac{1}{n}} \right) \dots \right) \right) \right)$$

3- Pour $u > 1$ on choisit une valeur de u pour laquelle $(b+u)$ n'est pas un nombre premier. Il serait intéressant de le choisir de telle sorte que le nombre $(b+u)$ puisse admettre plusieurs facteurs dans sa décomposition en produit de facteurs.

Exemples :

1- $\frac{3}{17} \approx \frac{3+1}{17+1} = \frac{4}{18} = \frac{2}{9}$. Avec $\frac{2}{9} \cdot 17 = 3 + \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{9} \right)$

L'erreur commise est trop grande et vaut $\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{9} \right)^{30}$.

2- $\frac{3}{17} \approx \frac{3+\frac{1}{2}}{17+\frac{1}{2}} = \frac{7}{35} = \frac{1}{5}$ (pour $u = \frac{1}{2}$). Avec $\frac{1}{5} \cdot 17 = 3 + \left(\frac{2}{5} \right)$

Là aussi l'erreur, qui vaut $\frac{2}{5}$, est trop grande.

²⁹- Abū l-Wafā a signalé que cette deuxième méthode est celle qui était connue à son époque.

³⁰- Abū l-Wafā a déclaré que l'erreur est trop grande en tenant compte des deux-tiers uniquement.

$$3- \quad \frac{3}{17} \approx \frac{3 + \frac{1}{7}}{17 + \frac{1}{7}} = \frac{22}{120} = \frac{11}{60} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \left(\frac{1}{10} \right) \text{ (pour } u = \frac{1}{7} \text{)}.$$

Cette valeur correspond à celle trouvée à travers la première méthode avant de procéder à son affinement.

$$4- \quad \frac{3}{17} \approx \frac{3 + \frac{1}{n}}{17 + \frac{1}{n}} \text{ avec } n > 7. \text{ Plus } n \text{ est grand plus l'approximation est meilleure.}$$

Remarque³¹

Abū l-Wafā a remarqué que cette méthode est trop longue. C'est pourquoi il a proposé de l'utiliser seulement pour compléter la première méthode :

$$\frac{3}{17} = \frac{1}{60} \left(10 + \frac{1}{60} \left(35 + \frac{5}{17} \right) \right) \approx \frac{1}{60} \left(10 + \frac{1}{60} \left(35 + \frac{5+1}{17+1} \right) \right)$$

$$\frac{3}{17} \approx \frac{1}{60} \left(10 + \frac{1}{60} \left(35 + \frac{1}{3} \right) \right)$$

$$\text{Ou bien } \frac{3}{17} \approx \frac{1}{60} \left(10 + \frac{1}{60} \left(35 + \frac{5 + \frac{1}{2}}{17 + \frac{1}{2}} \right) \right) = \frac{1}{60} \left(10 + \frac{1}{60} \left(35 + \frac{2}{7} + \frac{1}{5} \left(\frac{1}{7} \right) \right) \right)$$

$$\text{Ou bien } \frac{3}{17} \approx \frac{1}{60} \left(10 + \frac{1}{60} \left(35 + \frac{5}{17+1} \right) \right) = \frac{1}{60} \left(10 + \frac{1}{60} \left(35 + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} \right) \right).$$

Pour cette dernière valeur, Abū l-Wafā a ajouté une unité au dénominateur et a laissé le numérateur inchangé. La valeur trouvée est meilleure et plus précise.

Al-Karajī a probablement utilisé cette méthode lorsqu'il a donné le résultat suivant dans son ouvrage intitulé *al-Kāfī fī l-ḥisāb* :

$$\sqrt{539} \approx 23 + \frac{1}{8} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{6} \right).$$

³¹- Cette remarque prouve l'efficacité de ce moyen de calcul qui utilise les deux procédés à la fois.

En effet, en appliquant le procédé d'approximation de la racine carrée, qu'il a énoncé dans le même ouvrage, on trouve $\sqrt{539} \approx 23 + \frac{10}{47}$.

Comme 47 est un nombre premier supérieur à 10, al-Karajī a dû utiliser le dernier procédé d'approximation qu'Abū l-Wafā a exposé pour approcher la valeur de la fraction soude $\frac{10}{47}$

$$\text{ainsi : } 23 + \frac{10}{47} \approx 23 + \frac{10}{47+1} = 23 + \frac{5}{24} = 23 + \frac{1}{8} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{6} \right)^{32}.$$

Abū l-Wafā n'a pas utilisé une terminologie qui pourrait suggérer une généralisation de la dernière expression du procédé qu'on écrit $\frac{a}{b} \approx \frac{a}{b+1}$. Mais il est possible de vérifier la précision de cette méthode pour la fraction $\frac{3}{17}$ et pour d'autres fractions aussi. Nous ajoutons qu'il n'a fait aucune allusion à la nature des valeurs obtenues par les trois procédés. Nous pouvons vérifier qu'elle varie selon les cas :

1- Dans le cas $r_{i+1} < \frac{b}{2}$ du premier procédé et dans le dernier cas, qu'il a présenté

comme remarque, elle est par défaut.

Effectivement, dans le premier procédé, nous avons :

$$\frac{a}{b} \approx a_1 60^{-1} + a_2 60^{-2} + \dots + a_i 60^{-i} = x_1 \text{ avec } r_{i+1} < \frac{b}{2}.$$

Mais comme $\frac{a}{b} = a_1 60^{-1} + a_2 60^{-2} + \dots + a_i 60^{-i} + \frac{r_{i+1}}{b} \cdot 60^{-i}$ alors :

$$\frac{a}{b} - x_1 = \frac{r_{i+1}}{b} \cdot 60^{-i} > 0.$$

Dans le dernier cas suggéré comme remarque, Abū l-Wafā a utilisé le principe suivant :

$$\frac{a}{b} \approx \frac{a}{b+1}.$$

Dans ce cas, nous avons $\frac{a}{b} - \frac{a}{b+1} = \frac{a}{(b+1)b} > 0$.

³²- AL-KARAJĪ : *Al-Kāfī fī l-ḥisāb*, op. cit., p. 122. Nous signalons que Sami Chalhoub a utilisé une formule qu'il a attribuée à al-Qalaṣādī pour retrouver le résultat.

2- La valeur approchée, calculée par la deuxième expression du premier procédé, est par excès. De même que celle calculée par la deuxième méthode car :

$$\frac{a}{b} \approx a_1 60^{-1} + a_2 60^{-2} + \dots + (a_i + 1)60^{-i} = x_2 \text{ avec } r_{i+1} \geq \frac{b}{2} \text{ alors :}$$

$$\frac{a}{b} - x_2 = \frac{r_{i+1}}{b} \cdot 60^{-i} - 60^{-i} = 60^{-i} \left(\frac{r_{i+1}}{b} - 1 \right) < 0.$$

Pour la deuxième méthode, nous avons $\frac{a}{b} \approx \frac{a+u}{b+u}$ d'où $\frac{a}{b} - \frac{a+u}{b+u} = \frac{u(a-b)}{(b+u)b} < 0$.

Pour conclure, nous signalons qu'Abū l-Wafā a exposé dans ce chapitre *sur la manière de connaître les rapports des nombres sourds par approximation* de son ouvrage *al-manāzil as-sabō*³³ des règles qui utilisent des fractions sexagésimales. En introduisant le nombre 60 dans le dénominateur de la fraction $\frac{m}{n}$, il visait à l'écrire sous la forme :

$$\frac{a}{60} \text{ avec } a < 60 \text{ ou } \frac{1}{60} \left(a + \frac{b}{60} \right) \text{ ou } \frac{1}{60} \left(a + \frac{1}{60} \left(b + \frac{c}{60} \right) \right) \dots$$

Les fractions *exprimables* auxquelles il aboutit sont celles dont le dénominateur est un multiple des nombres 2, 3, 5 qui interviennent dans la décomposition du nombre 60. Ainsi et comme le montre ses calculs, la méthode, qu'il a proposée, aboutit toujours à l'écriture de la fraction *sourde* en somme et produit des fractions *exprimables* suivantes :

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6} \text{ et } \frac{1}{10}.$$

La méthode d'as-Samaw'al³⁴

As-Samaw'al al-Maghribī a résolu le problème d'Abū l-Wafā dans son étude de certaines opérations numériques, qu'il a nommées *aōmāl at-tafrīq* [Les opérations de séparation]. Ces opérations sont essentiellement la division et l'extraction de la racine carrée et des racines d'ordre supérieur. Il a utilisé la technique des tableaux afin de déterminer les

³³- SAIDAN, A. S. : *Tārīkh ōilm al-ḥisāb al-ārabī* [L'histoire de la science du calcul arabe], op. cit., pp. 116-119.

³⁴- RASHED, R. : *Entre arithmétique et algèbre. Recherches sur l'histoire des mathématiques arabes*, Paris, Société d'édition Les Belles Lettres, 1984, pp. 143-144.

valeurs approchées des résultats obtenus par ces deux opérations en fonction d'un nombre infini de fractions décimales. Nous exposons sa méthode à travers l'exemple suivant :

Problème

Diviser 210 par 13

La résolution

$$\frac{210}{13} = 16 + \frac{2}{13}$$

$$\begin{aligned} \frac{2}{13} &= \frac{2 \cdot 10}{13 \cdot 10} = \frac{1}{10} + \frac{7 \cdot 10}{13 \cdot 10^2} = \frac{1}{10} + \frac{5}{100} + \frac{50}{13 \cdot 10^3} \\ &= \frac{1}{10} + \frac{5}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{11 \cdot 10}{13 \cdot 10^4} \\ &= \frac{1}{10} + \frac{5}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{8}{10000} + \frac{6 \cdot 10}{13 \cdot 10^5} \end{aligned}$$

$$\frac{2}{13} \approx \frac{1}{10} + \frac{5}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{8}{10000} + \frac{4}{100000}$$

Ainsi, $\frac{210}{13} = 16,15384$ qui est une valeur par défaut évaluée à cinq chiffres après la virgule.

L'erreur commise est égale à $e = \frac{8}{13 \cdot 10^5}$.

Il est possible de poursuivre les calculs et atteindre la précision qu'on veut.

Un élément important caractérise la méthode d'as-Samaw'al, il s'agit de l'utilisation des tableaux. Pour la fraction $\frac{2}{13}$, elle consiste à ajouter un zéro à droite de deux et à diviser le nombre 20 par 13. On marque le quotient de cette première division qui est 1 et on ajoute un zéro à droite du reste qui est 7. Puis on divise 70 par 13 et on marque le quotient qui est 5 et on ajoute un zéro à droite du reste qui est 3. Puis on divise 30 par 13 et ainsi de suite on répète l'opération indéfiniment.

I.2.2. Les procédés d'approximation de la racine carrée, de la racine cubique et de la racine d'ordre supérieur

Dans les ouvrages, que nous avons cités à l'exception de celui d'Abū l-Wafā, les formules d'approximation de la racine carrée (respectivement de la racine cubique) ont été énoncées après l'algorithme de l'extraction de la racine carrée d'un nombre carré parfait

(respectivement de la racine cubique d'un nombre cube parfait). Ces deux algorithmes sont basés sur l'écriture des nombres dans le système décimal positionnel et sur les identités remarquables suivantes :

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2.ab \quad \text{et} \quad (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Concernant la racine carrée, on se servait du développement décimal d'un nombre A qui est :

$$A = (x_0 + x_1 + \dots + x_n) = \sum_{i=0}^n a_i 10^i \quad \text{c'est à dire avec } x_i = a_i \cdot 10^i$$

Ainsi, tous les calculs sont issus de l'expression suivante :

$$\begin{aligned} (x_0 + x_1 + \dots + x_n)^2 &= (a_0 + a_1 \cdot 10 + \dots + a_n \cdot 10^n)^2 \\ &= a_0^2 + (2 \cdot a_0 a_1 + a_1^2) 10 + (2 \cdot a_0 a_2 + 2 a_1 a_2 + a_2^2) 10^2 + \dots + (2 a_0 a_n + 2 a_1 a_n + \dots + 2 a_{n-1} a_n + a_n^2) 10^n \end{aligned}$$

La représentation de cette opération ressemble beaucoup à celle de la division. En effet, on inscrit le nombre dont on veut extraire la racine sur une ligne. Et on réserve la ligne en dessus pour inscrire les chiffres de la racine et celle, qui est en dessous, aux doubles produits auxquels s'ajoute le carré du dernier chiffre tel qu'il est indiqué dans l'égalité précédente.

Si nous considérons $N = \overline{a_3 a_2 a_1 a_0}$ le nombre dont on veut calculer la racine et $\sqrt{N} = \overline{b_1 b_2}$ alors la représentation de l'opération est la suivante :

$$\begin{array}{cccc} & & b_1 & b_2 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ & b_1^2 & 2b_1 b_2 & b_2^2 \end{array}$$

Mais contrairement à l'algorithme de la racine carrée, qui est le même dans tous les ouvrages que nous avons consultés, l'algorithme de la racine cubique exacte a eu plusieurs formulations avant d'aboutir à celle d'al-Kāshī.

Dans l'état actuel de nos connaissances, rien ne confirme qu'al-Khwārizmī a calculé la racine cubique d'un nombre cube parfait dans son traité d'arithmétique³⁵. Mais, les écrits du dixième siècle, qui se sont inspirés du traité d'al-Khwārizmī, ont évoqué ce calcul et ont

³⁵- D'après les versions latines du XII^{ième} siècle sur le calcul indien, ce dernier ne contient pas d'étude sur l'extraction de la racine cubique.

donné une description de ses différentes étapes sur des exemples bien précis. An-Nasawī a présenté l'algorithme d'une manière détaillée et très clair. Youschkevitch a affirmé qu'il a été le premier à indiquer un procédé pour l'extraction des racines cubiques. Mais, il a, aussi, noté que sa méthode est déjà décrite dans *Uṣūl ḥisāb al-hind* de Kushyār Ibn Labbān al-Jīlī. Il est intéressant de savoir aussi que la même méthode se trouve exposée dans *L'art du calcul en neuf chapitres (Kieou tchang souam chou)*, qui est un ouvrage anonyme chinois connu d'après une rédaction remontant au III^e siècle. C'est celle aussi qui exprime le schéma du calcul, qui coïncide avec la méthode de résolution des équations algébriques publiée par P. Ruffini en 1804 et 1813³⁶.

D'autres écrits non encore retrouvés contiennent en plus l'algorithme d'extraction de la racine quatrième cinquième ou plus. Parmi ces derniers nous citons ceux qui ont été signalés dans plusieurs études récentes comme *Kitāb fī istikhrāj dīlō al-kaṭb wa māl al-māl wa mā yaqtaribu minhumā* [Livre sur la détermination des côtés du cube, du carré-carré et de ce qui s'y rapporte] rédigé par Abū l-Wafā. Youschkevitch a noté qu'en se rapportant à F. Woepcke l'auteur aurait également étudié dans cet ouvrage la solution d'une équation de degré 4³⁷. Il semble aussi qu'al-Bīrunī a écrit un traité sur l'extraction des racines cubiques et des racines d'ordre supérieur³⁸. Quant à ōUmar al-Khayyām, qui a déclaré dans son ouvrage d'algèbre avoir donné une démonstration aux procédés indiens permettant l'extraction des racines carrées et cubiques, aurait décrit un procédé général pour la détermination des racines d'ordre supérieur des nombres entiers³⁹ dans son traité *Mushkilat al-ḥisāb* [La difficulté du calcul]⁴⁰. Mais aucun des écrits que nous venons de citer n'a été retrouvé.

L'étude des algorithmes de la racine cubique ou d'ordre supérieur, exposés dans les ouvrages que nous avons consultés, montre les changements qualitatifs que ces derniers ont subit durant cinq siècles au niveau de la formulation, de la représentation et de la terminologie. La détermination des positions, que devraient occuper les résultats des calculs partiels par rapport aux positions, qui définissent le nombre dont on veut extraire la racine, n'a

³⁶- YOUSCHKEVITCH, A. P. : *Les mathématiques arabes (VIIIe-XVe) siècles*, op. cit., p. 76, 168 (note 36).

³⁷- Op. cit., p. 76, 169 (note 37).

³⁸- Op. cit., p. 76.

³⁹- DJEBBAR, A. & RASHED, R. : *L'œuvre algébrique d'al-Khayyam*, Etablie, traduite et analysée, Alep, Sources and Studies in the History of Arabic Mathematics 3, Univesity of Aleppo, I. H. A. S., 1981, pp. 9-10. al-Khayyām n'a pas donné le titre de son ouvrage dans cette œuvre.

⁴⁰- Ce titre a été signalé par Youschkevitch. Voir YOUSCHKEVITCH, A. P. : *Les mathématiques arabes (VIIIe-XVe) siècles*, op. cit., p. 76.

pas été justifiée. De même que la notion de déplacement qui intervient dans chaque étape du calcul.

Concernant l'algorithme de la racine cubique, la description, qui a été donnée par les mathématiciens du X^e siècle, est basée sur l'identité :

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Et aussi sur le principe d'effacer les résultats intermédiaires lorsqu'ils n'interviennent pas dans les étapes suivantes du calcul.

Au XII^e siècle, la description et la représentation de l'algorithme sont exposées d'une manière différente. L'ouvrage d'as-Samaw'al al-Maghribī (m.1175) intitulé *al-Qiwāmī fī l-ḥisāb al-hindī*, révèle certains aspects de la nouvelle représentation donnée aux algorithmes des racines d'ordre supérieur. En effet, l'extraction de la racine cinquième d'un nombre fractionnaire, écrit dans le système sexagésimal, a été exposée dans cet ouvrage accompagnée de plusieurs tableaux qui expliquent les étapes importantes de ce calcul.

Aucune justification n'a été donnée mais les notions algébriques, qui ont été utilisées, sont celles développées dans la tradition algébrique représentée par al-Karajī (m. 1029). As-Samaw'al al-Maghribī s'est aussi servi des notions du calcul indien décrites par al-Khwārizmī comme la notion de position « *martaba* » ou « *manzila* » et celle de déplacement « *tanqīl* ».

Les calculs, qu'il a présentés, montrent les progrès qui ont été enregistrés dans le domaine de l'algèbre et du calcul indien au cours des trois siècles postérieurs à al-Khwārizmī. L'exposé d'as-Samaw'al permet de supposer que la méthode, qu'il a décrite, était bien connue à son époque⁴¹.

Au XIV^e siècle, an-Nīshābūrī a exposé deux algorithmes différents dans son ouvrage intitulé *ar-Risāla ash-shamsiyya fī l-uṣūl al-hīsābiyya* [L'épître solaire sur les fondements du calcul]⁴². Les outils, qu'il a utilisés, ne sont pas les mêmes dans les deux algorithmes. Le premier a été présenté dans le cas de l'extraction de la racine carrée seulement. Une étude comparative montre quelques aspects communs entre cet algorithme et celui de la racine

⁴¹- RASHED, R. : *Entre arithmétique et algèbre, Recherches sur l'histoire des mathématiques arabes*, op. cit., pp. 100-109.

⁴²- ABASSI, A. : *Le calcul de la racine n^{ième} d'un nombre chez al-Ḥasan an-Nīshābūrī (XIV^e siècle)*, op. cit., pp. 26- 38.

cubique ou d'ordre supérieur connu en Occident musulman⁴³. C'est aussi le même algorithme qui a été décrit par al-Karajī⁴⁴.

An-Nīshābūrī n'a pas exposé les raisons qui l'ont amené à abandonner cet algorithme au profit du deuxième, qu'il a généralisé aux racines d'ordre supérieur. D'après sa description de ce deuxième algorithme, il semble que le précédent présente quelques difficultés dans l'apprentissage des différentes étapes du calcul. Une représentation de l'algorithme aurait pu servir de support visuel, pour mieux assimiler et mémoriser ces étapes, mais cette représentation est absente dans l'ouvrage d'an-Nīshābūrī.

Dans le deuxième algorithme, an-Nīshābūrī a repris la méthode de calcul utilisée par as-Samaw'al pour décrire l'algorithme d'extraction des racines d'ordre supérieur. Un élément nouveau caractérise son étude et marque une étape importante dans l'histoire des algorithmes. Il s'agit de l'utilisation d'un seul tableau dans lequel sont enregistrés les résultats des calculs de chaque étape de l'algorithme. Sa représentation est remarquable et peut être considérée comme une première version de la représentation finale de l'algorithme, qui sera exposée dans *Miftāḥ al-ḥisāb* d'al-Kāshī. An-Nīshābūrī a qualifié ce deuxième algorithme de *méthode facile*⁴⁵. La terminologie, qu'il a utilisée, est différente de celle, qu'il a consacrée au premier algorithme. Il a nommé les chiffres, qui déterminent le nombre dont on cherche la racine, par « *mufrad* ». Nous signalons qu'as-Samaw'al a utilisé une terminologie liée aux positions, qui sont occupées par les chiffres de la racine. Il les a nommées *al-muḥṭiya* mais les mathématiciens du X^e siècle n'ont pas utilisé une terminologie spécifique.

L'analyse du texte d'an-Nīshābūrī montre surtout la familiarité de ce dernier avec les différents concepts et techniques qu'il a utilisés tout au long de son exposé. Ce qui permet de supposer que le nouvel aspect de l'algorithme était bien connu à son époque au moins.

La représentation d'al-Kāshī (m.1429), donnée dans *Miftāḥ al-ḥisāb*, contient les progrès et les modifications, qui ont été développées durant les siècles précédents. Elle est celle qui permet d'établir une généralisation du procédé. L'algorithme d'extraction de la racine nième d'un nombre a été présenté d'une manière plus complète et plus achevée. Les différentes étapes de l'opération ont été clairement exposées et représentées dans un seul

⁴³ - En effet, dans les deux traditions l'algorithme n'utilise pas de tableau et les calculs sont effectués indépendamment de ceux qui les précèdent. Mais concernant la terminologie utilisée, elle n'est pas la même dans les deux traditions.

⁴⁴ - AL-KARAJĪ : *Al-Kāfī fī l-ḥisāb*, op. cit., pp. 115-119.

⁴⁵ - ABASSI, A. : *Le calcul de la racine n^{ième} d'un nombre chez al-Ḥasan an-Nīshābūrī (XIV^e siècle)*, op. cit., pp. 26-38.

tableau, qui englobe et conserve les résultats partiels. Quant à la terminologie utilisée, elle est la même que celle utilisée par an-Nīshābūrī. Elle est choisie suivant la nature des outils utilisés, qui sont essentiellement algébriques comme *ad-dilō*, *al-māl*, *al-kaḏb* ... etc. Elle est basée, aussi, sur la notion de position « *manzila* » et celle de déplacement « *tanqīl* » qui caractérisent le système décimal⁴⁶. Les résultats des calculs partiels ont été représentés dans un seul tableau mais dans le sens inverse de celui d'an-Nīshābūrī⁴⁷.

I.2.2.a Les procédés d'approximation de la racine carrée d'un nombre

Les formules d'approximation de la racine carrée d'un nombre sont basées sur la relation qu'il y a entre deux nombres carrés consécutifs. Ainsi, pour tout nombre non carré A , il existe un nombre entier n , calculé par l'algorithme d'extraction de la racine carrée, qui vérifie $n^2 \leq A < (n+1)^2$ et $A = n^2 + r$.

Nous signalons que la condition ($r < 2n + 1$) n'a pas été énoncée explicitement dans les ouvrages que nous avons consultés⁴⁸.

Formule 1

$$\sqrt{A} = \sqrt{n^2 + r} \approx n + \frac{A - n^2}{2n} = n + \frac{r}{2n}$$

Cette formule a été présentée par al-Khwārizmī à travers des exemples bien précis dans son traité sur le calcul indien⁴⁹. La version arabe de l'ouvrage est encore perdue mais son contenu est accessible dans les versions latines du XII^e siècle⁵⁰.

⁴⁶- Al-Kāshī a clairement utilisé le schéma de Ruffini-Horner pour le calcul de la racine cinquième d'un nombre entier. Voir AL-KĀSHĪ : *Miftāḥ al-ḥisāb*, op. cit., pp. 66-71.

⁴⁷- An-Nīshābūrī a inscrit les résultats des calculs partiels de haut vers le bas. Voir ABASSI, A. : *Le calcul de la racine n^{ième} d'un nombre chez al-Ḥasan an-Nīshābūrī (XIV^e siècle)*, op. cit., pp. 33-36. Quant à al-Kāshī, il les a inscrits de bas vers le haut. Voir AL-KĀSHĪ : *Miftāḥ al-ḥisāb*, op. cit., pp. 68-69.

⁴⁸- Dans son analyse d'une version de l'ouvrage de calcul d'al-Khwārizmī, M.Folkerts a posé la condition ($r < 2n$). Voir FOLKERTS, M. & KUNITZSCH, P. : *Die Alteste Lateinische Schrift Uber das Indische Rechnen Nach al-Hwārizmī*, Munchen, Verlag Bayerischen Akademie Der Wissenschaften, 1997, p. 178.

⁴⁹- ALLARD, A. : *Muḥammad Ibn Mūsā al-Khwārizmī, le calcul indien (Algorismus), Versions latines du XII^e siècle*, op. cit, p. 52-53, 183-184, 188. FOLKERTS, M. & KUNITZSCH, P. : *Die Alteste Lateinische Schrift Uber das Indische Rechnen Nach al-Hwārizmī*, op. cit., pp. 177-181.

⁵⁰- L'édition d'Allard utilise les versions latines qui datent du XII^e siècle et qui sont : *Le Dixit Algorizmi* qui est un texte contenu dans Ms Cambridge, University Library, Li.6.5. Il est considéré comme un témoin précieux du calcul indien d'al-Khwārizmī mais malheureusement il ne contient pas le chapitre sur le calcul de la racine carrée. La deuxième version est le *Liber Ysagogarum Alchorismi*, la troisième est le *Liber Alchorismi* et la dernière est le *Liber Pulueris*. Ces trois dernières œuvres qui s'appuient sur la première contiennent par contre le chapitre sur la racine carrée d'un nombre ainsi que le procédé d'approximation par les zéros que

L'origine de cette formule est inconnue. Al-Khwārizmī n'a évoqué aucune source et n'a fait aucune référence précise aux ouvrages grecs, indiens ou arabes. Mais, comme il l'a exposée après la description de la numération indienne et des opérations arithmétiques élémentaires (addition, soustraction, multiplication et division) il est probable qu'il l'ait formulée en s'inspirant des procédés du calcul indien.

Nous pouvons supposer aussi qu'al-Khwārizmī aurait énoncé la formule en s'inspirant d'un héritage mathématique babylonien non écrit mais dont l'influence ne peut être écartée⁵¹. L'analyse des textes, publiés à partir des tablettes cunéiformes, nous encouragent à faire cette conjecture. En effet, elle a révélé que les babyloniens ont attribués les deux valeurs, 1;25 et 1;24,51,10, au nombre irrationnel $\sqrt{2}$. L'idée principale du calcul, qui aurait permis de trouver ces deux valeurs, est encore inconnue. Mais, les études, qui ont été réalisées sur ce sujet, ont prouvé qu'il est possible de calculer ces valeurs en utilisant la notion de moyenne arithmétique⁵².

Ainsi, la généralisation du procédé babylonien peut être présentée comme suit :

Pour tout nombre $A = n^2 + r$

Si on pose $\sqrt{n^2 + r} \approx n$ et $\sqrt{n^2 + r} \approx \frac{n^2 + r}{n}$ alors $\frac{1}{2} \left(n + \frac{n^2 + r}{n} \right)$ serait une troisième

valeur approchée dont l'expression correspond parfaitement à la formulation d'al-Khwārizmī car :

$$\frac{1}{2} \left(n + \frac{n^2 + r}{n} \right) = n + \frac{r}{2n}$$

nous exposerons par la suite. Pour plus de renseignements sur les auteurs de ces trois dernières œuvres ainsi que sur la comparaison de leur contenus voir YOUSCHKEVITCH, A. P. : *Les mathématiques arabes (VIIIe-XVe) siècles*, op. cit., pp. 15-16, ALLARD, A. : *Muhammad Ibn Mūsā al-Khwārizmī, le calcul indien (Algorismus), Versions latines du XIIIe siècle*, op. cit., pp. I-XXXV. L'étude de M. Folkerts est basée sur le manuscrit HC 397/726 of the Hispanic Society of America. M. Folkerts et R. Lorch ont signalé cette version latine, qui est plus complète, au cinquième colloque maghrébin sur l'histoire des mathématiques arabes. Voir FOLKERTS, M. & LORCH, R. : The Mathematical and astronomical writings of al-Khwārizmī, *Actes du Cinquième Colloque Maghrébin sur l'Histoire des Mathématiques Arabes*, 1-3/12/1994, Tunis, A. T. S. M. (edit.), 1998, p. 109.

⁵¹- L'influence de la tradition babylonienne sur l'ouvrage d'algèbre d'al-Khwārizmī a été évoquée dans plusieurs études récentes. Voir BERGGREN, J. L. : *Episodes in the mathematics of medieval Islam*, New York, Spring-Velarg, 1986, p. 7.

⁵²- CAVEING, M. : *La constitution du type mathématique de l'idéalité dans la pensée grecque*, Thèse de Doctorat, Paris, Université de Paris X, 1977, Tome III, pp. 1148-1155.

Mais, contrairement à l'énoncé d'al-Khwārizmī, le procédé babylonien ne s'arrête pas à cette étape car les valeurs que nous avons signalées s'obtiennent en répétant le procédé un nombre fini de fois⁵³.

L'origine grecque n'est pas écartée aussi. Mais, l'apport grec pour le calcul par approximation au IX^e siècle en Orient dépend des dates de traduction des premiers ouvrages mathématiques et astronomiques. Parmi ceux, qui contiennent le calcul des racines carrées de certains nombres non carrés parfaits, nous citons l'*Almagest* de Ptolémée (II^e s.)⁵⁴. Sa traduction a commencé à partir du VIII^e siècle après celle des œuvres indiennes ainsi son influence est probable.

Il est possible qu'al-Khwārizmī, qui a élaboré ses célèbres tables astronomiques qui ont circulé dans tout l'empire⁵⁵, ait eu connaissance du procédé d'approximation grec à travers les tables de Ptolémée. Ce procédé est celui qui a été explicité par Théon (IV^e s.)⁵⁶.

Nous concluons que même si l'idée du procédé d'approximation d'al-Khwārizmī est présente dans les sources que nous avons évoquées mais sa formulation est soit indienne soit propre à al-Khwārizmī.

Parmi les successeurs d'al-Khwārizmī, seuls les mathématiciens du X^e siècle ont utilisé cette formule dans leurs calculs. Les spécialistes du calcul indien ne l'ont pas tous évoqué. De ceux qui l'ont énoncée, nous citons, à titre d'exemple, al-Uqlīdisī (X^e) qui l'a formulée ainsi⁵⁷ :

$$\sqrt{n^2 + r} \approx \begin{cases} n + \frac{r}{2n} & \text{si } \frac{r}{2} \neq n \end{cases}$$

Par analogie aux conditions, qui ont été posées par les mathématiciens de l'Occident musulman, celle-ci peut s'écrire $\frac{r}{2} < n$.

⁵³- Les calculs sont clairement exposés dans l'Annexe 1.

⁵⁴- HEATH, T. : *A history of Greek mathematics*, New York, Dover Publications, Inc, vol II, pp. 277-284.

SMITH, D. E. : *History of mathematics*, New York, Dover Publications, Inc, vol 1, 1958, p. 131.

⁴⁶- DJEBBAR, A. : *Une histoire de la science arabe*, Paris, Editions du Seuil, 2001, pp. 160- 165, 197.

⁵⁶- Voir Annexe 2.

⁵⁷- AL-UQLĪDISĪ : *Kitāb al-fuṣūl fī l-ḥisāb al-hindī*, op. cit., p. 218.

Al-Baghdādī (m. 1037) a lui aussi énoncé la formule dans son ouvrage *at-Takmila fī l-ḥisāb al-hindī*⁵⁸. Il l'a également utilisée dans une épître qu'il a intitulée *Kitāb fī l-misāḥa* [Livre sur la surface]⁵⁹.

Abū l-Wafā l'a certainement utilisée lorsqu'il a donné la valeur $\sqrt{200} \approx 14 + \frac{1}{7}$ dans son ouvrage de géométrie⁶⁰.

Mais, l'abandon du procédé a été observé dans plusieurs ouvrages publiés dès le X^e siècle. Al-Baghdādī a justifié cela en évoquant la nature de l'erreur commise sur les deux exemples suivants :

$$\sqrt{2} = \sqrt{1^2 + 1} \approx 1 + \frac{1}{2}, \quad \sqrt{3} = \sqrt{1^2 + 2} \approx 1 + \frac{2}{2} = 2$$

Comme $\left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = 2 + \frac{1}{4}$ et $\left(1 + \frac{2}{2}\right)^2 = 4 = 3 + 1$, il a déclaré que les erreurs sont trop grandes par rapport à celles commises par un autre procédé qui était en usage⁶¹.

Al-Uqlīdisī a signalé que l'erreur commise est par excès et qu'elle vaut $\left(\frac{r}{2n}\right)^2$ ⁶².

Effectivement, nous pouvons le vérifier ainsi : $\left(n + \frac{r}{2n}\right)^2 = \left(n^2 + r\right) + \left(\frac{r}{2n}\right)^2$.

Quant à la justification du procédé, nous n'avons pas trouvé des témoignages précis sur les éléments qui permettent d'avoir un résultat approché.

Les successeurs d'al-Khwārizmī ont évoqué la relation entre deux nombres carrés consécutifs : $(n+1)^2 - n^2 = 2n+1$, mais seulement pour expliquer la présence du terme $(2n+1)$ dans le dénominateur de la fraction qui intervient dans la formule suivante.

Formule 2

$$\sqrt{A} = \sqrt{n^2 + r} \approx n + \frac{A - n^2}{2n + 1}$$

⁵⁸ - AL-BAGHDĀDĪ : *At-Takmila fī l-ḥisāb al-hindī*, op. cit., p. 86.

⁵⁹ - Saidan a présenté l'édition de cette épître dans le même ouvrage qui contient celle d'*at-Takmila*, voir AL-BAGHDĀDĪ : *At-Takmila fī l-ḥisāb al-hindī*. op. cit., pp.333, 339.

⁶⁰ - ABŪ L-WAFĀ : *Kitāb fī mā yaḥtāju ilayhī aṣ-ṣāniḥ min aḥmāl al-handasa* [Livre sur ce qui est nécessaire à l'artisan en constructions géométriques], op. cit., p. 148

⁶¹ - Il s'agit du deuxième procédé que nous présenterons à travers la formule 2.

⁶² - AL-UQLĪDISĪ : *Kitāb al-fuṣūl fī l-ḥisāb al-hindī*, op. cit., p. 218.

C'est la formule qu'al-Baghdādī a proposée après avoir commenté la première. Il a aussi déclaré que ce procédé d'approximation est plus précis que le précédent en se basant sur les deux exemples précédents⁶³.

Effectivement, en appliquant cette formule on obtient : $\sqrt{2} \approx 1 + \frac{1}{3}$, $\sqrt{3} \approx 1 + \frac{2}{3}$

Pour le nombre irrationnel $\sqrt{2}$, nous avons :

$$e_1 = \left| 2 - \left(1 + \frac{1}{2} \right)^2 \right| = \frac{1}{4} \quad (\text{est l'erreur commise par le premier procédé})$$

$$e_2 = \left| 2 - \left(1 + \frac{1}{3} \right)^2 \right| = \frac{2}{9} \quad (\text{est l'erreur commise par le deuxième procédé})$$

Avec $\frac{1}{4} > \frac{2}{9}$.

De même, pour le nombre irrationnel $\sqrt{3}$, nous avons :

$$e_1 = \left| 3 - \left(1 + \frac{2}{2} \right)^2 \right| = 1 \quad (\text{est l'erreur commise par le premier procédé})$$

$$e_2 = \left| 3 - \left(1 + \frac{2}{3} \right)^2 \right| = \frac{2}{9} \quad (\text{est l'erreur commise par le deuxième procédé})$$

Avec $1 > \frac{2}{9}$.

Al-Baghdādī a, de ce point de vu, justifié l'intérêt d'utiliser cette formule au lieu de celle d'al-Khwārizmī. Mais, nous signalons que lorsqu'il a évoqué l'irrationalité du nombre $\sqrt{10}$ il a appliqué la formule 1⁶⁴. Nous ajoutons que pour cet exemple précis la formule 1 est plus précise car :

$$\sqrt{10} \approx 3 + \frac{1}{6} \quad \text{et} \quad e_1 = \frac{1}{36} \quad (\text{par la première formule})$$

$$\sqrt{10} \approx 3 + \frac{1}{7} \quad \text{et} \quad e_2 = \frac{6}{49} \quad (\text{par la deuxième formule})$$

⁶³- AL-BAGHDĀDĪ : *At-Takmila fī l-ḥisāb al-hindī*, op. cit., pp. 76-77.

⁶⁴- AL-BAGHDĀDĪ : *At-Takmila fī l-ḥisāb al-hindī*, op. cit., p.71. Saidan a signalé que dans la marge d'une des copies qu'il a utilisées dans son édition, il est écrit « Ceci d'après ce qu'a dit al-Khwārizmī mais d'après la méthode qui est en usage la valeur approchée est trois et un septième ». Voir AL-BAGHDĀDĪ : *At-Takmila fī l-ḥisāb al-hindī*, op. cit., p. 302.

Pour compléter l'étude d'al-Baghdādī, nous énonçons les résultats suivants :

$$1- \text{ Si } r < n \text{ alors } \left(\left(n + \frac{r}{2n} \right)^2 - A \right) < \left(A - \left(n + \frac{r}{2n+1} \right)^2 \right)$$

$$2- \text{ Si } r \geq n \text{ alors } \left(\left(n + \frac{r}{2n} \right)^2 - A \right) > \left(A - \left(n + \frac{r}{2n+1} \right)^2 \right)$$

Ainsi, la justification d'al-Baghdādī sur l'abandon de la formule 1 au profit de celle-ci est valide seulement pour le cas $r \geq n$.

Al-Uqlīdisī a proposé la formule 2 lorsque $n = \frac{r}{2}$ avant de l'étendre au cas général.⁶⁵

An-Nasawī (m. vers 1030) a énoncé le procédé dans son ouvrage *al-Muqni'ô fī l-ḥisāb al-hindī* [Le livre suffisant sur le calcul indien]⁶⁶. Ibn Labbān l'a appliqué sur un exemple précis et il a suggéré d'écrire la partie fractionnaire dans la base sexagésimale⁶⁷.

Al-Karajī (m. vers 1029)⁶⁸, as-Samaw'al (m. 1175),⁶⁹ Naṣīr ad-dīn aṭ-Ṭūsī (m. 1274)⁷⁰ et al-Kāshī (m. 1429)⁷¹ ont donné au procédé la formulation suivante :

$$\sqrt{A} = \sqrt{n^2 + r} \approx n + \frac{A - n^2}{(n+1)^2 - n^2}$$

C'est cette formulation, qui a été adoptée par les mathématiciens à partir du XII^e siècle au moins avant d'être généralisée pour la racine d'ordre supérieur.

Al-Uqlīdisī a signalé que l'erreur commise par ce procédé est par défaut⁷².

$$\text{En effet, } \left(n + \frac{r}{2n+1} \right)^2 = \left(n^2 + r \right) + \left[\left(\frac{r}{2n+1} \right)^2 - \frac{r}{2n+1} \right]$$

⁶⁵- AL-UQLĪDISĪ : *Kitāb al-fuṣūl fī l-ḥisāb al-hindī*, op. cit., p. 218.

⁶⁶- YOUSCHKEVITCH, A. P. : *Les mathématiques arabes (VIIIe-XVe siècles)*, op. cit., pp, 16, 22.

⁶⁷- IBN LABBĀN : *Uṣūl ḥisāb al-hind*, op. cit., p. 81.

⁶⁸- AL-KARAJĪ : *Al-Kāfī fī l-ḥisāb*, op. cit., p. 120.

⁶⁹- RASHED, R. : *Entre arithmétique et algèbre. Recherches sur l'histoire des mathématiques arabes*, op. cit., p.140.

⁷⁰- DJEBBAR, A. : Algorithmes et optimisations dans les mathématiques arabes, *Actes du 1^e Symposium International de l'ICOMICD sur Informatics and the teaching of mathematics in developing countries* (Monastir, 3-7 février 1986), AMARA, M., BOUDRIGA, N. & HARZALLAH, K., (édit.), Tunis 1987, pp. 185-194.

⁷¹- AL-KĀSHĪ : *Miftāḥ al-ḥisāb*, op. cit., pp. 64-65.

⁷²- AL-UQLĪDISĪ : *Kitāb al-fuṣūl fī l-ḥisāb al-hindī*, op. cit., p. 218.

Mais, puisque $0 < \frac{r}{2n+1} < 1$ alors $\left[\left(\frac{r}{2n+1} \right)^2 - \frac{r}{2n+1} \right] < 0$

Aucune justification n'a été proposée dans les ouvrages que nous avons consultés. Al-Baghdādī a, cependant, expliqué que le principe de cette approximation réside dans le rapport défini par le reste r et la différence entre les nombres carrés consécutifs qui encadrent A : c.-à-d. $\left((n+1)^2 - n^2 \right)^{73}$. Mais, cette remarque ne justifie pas la présence du terme $(2n+1)$ dans le dénominateur de la fraction.

Nous pouvons proposer trois moyens de justifier ce calcul approché :

1- En utilisant l'opération qui consiste à négliger des quantités très petites de la manière suivante :

On pose $\sqrt{n^2 + r} = n + u$ avec $0 < u < 1$

$A = (n + u)^2 = n^2 + 2nu + u^2$. Puis, en posant $u^2 \approx u$, on aboutit à $A - n^2 \approx 2nu + u$

D'où $u \approx \frac{A - n^2}{2n + 1}$. C'est-à-dire $\sqrt{n^2 + 1} \approx n + \frac{A - n^2}{2n + 1}$.

Nous signalons que cette opération n'a pas été explicitement énoncée dans les ouvrages que nous avons consultés.

2- En utilisant l'interpolation linéaire, qui est connue et utilisée dans les ouvrages astronomiques⁷⁴, de la manière suivante :

On considère la fonction $f(x) = x^2$, passant par les deux points $M(n, f(n))$ et $N((n+1), f(n+1))$.

Sachant que $f(n) < A < f(n+1)$ avec $A = f(\sqrt[2]{A})$, on peut écrire la relation suivante :

$$\frac{A - f(n)}{\sqrt[2]{A} - n} \approx \frac{f(n+1) - f(n)}{(n+1) - n}$$

D'où l'approximation $\sqrt[2]{A} \approx n + \frac{A - n^2}{(n+1)^2 - n^2} = n + \frac{A - n^2}{2n + 1}$.

3- En utilisant la méthode de fausse position, qui est connue et utilisée dans les ouvrages mathématiques arabes⁷⁵, de la manière suivante :

⁷³- AL-BAGHDĀDĪ : *At-Takmila fī l-ḥisāb al-hindī*, op. cit., p. 90.

⁷⁴- BERGGREN, J. L. : *Episodes in the mathematics of medieval Islam*, op. cit., pp. 146-148.

Pour résoudre l'équation $x^2 = A$, on a :

Pour $x_1 = n$ l'erreur commise est par défaut et vaut $e_1 = A - n^2$.

Pour $x_2 = n + 1$ l'erreur commise est par excès et vaut $e_2 = (n + 1)^2 - A$.

La solution est alors donnée par la formule suivante :

$$\sqrt{A} = \frac{x_1 e_2 + x_2 e_1}{e_2 + e_1} = n + \frac{A - n^2}{2n + 1}$$

Nous signalons que nous n'avons trouvé aucun indice qui pourrait confirmer l'utilisation des trois méthodes citées par les mathématiciens de l'Orient musulman, dans le but de justifier un procédé d'approximation.

Formule 3

$$\sqrt{A} = \sqrt{n^2 + r} \approx n + \frac{2(A - n^2)}{2n + (2n + 1)} = n + \frac{(A - n^2)}{2n + \frac{1}{2}}$$

Cette formule a été proposée par al-Uqlīdisī après avoir remarqué que la valeur calculée par la formule 1 est par excès et celle calculée par la formule 2 est par défaut⁷⁶.

Il n'a fait aucun commentaire sur la nature de la valeur calculée par ce procédé. Mais nous pouvons vérifier que :

$$\left(n + \frac{A - n^2}{2n + \frac{1}{2}} \right)^2 = (n^2 + r) + \left(\frac{4r^2}{(4n + 1)^2} - \frac{r}{4n + 1} \right)$$

D'où les résultats suivants :

Si $r \geq n$ alors $\left(\frac{4r^2}{(4n + 1)^2} - \frac{r}{4n + 1} \right) > 0$. Dans ce cas la valeur est par excès.

Si $r < n$ alors $\left(\frac{4r^2}{(4n + 1)^2} - \frac{r}{4n + 1} \right) < 0$. Dans ce cas la valeur est par défaut.

Aucune indication n'a été donnée sur une éventuelle généralisation du procédé. De plus, comme pour les formules précédentes, aucune justification n'a été indiquée pour ce calcul. Mais, en utilisant l'opération consistant à négliger les quantités positives plus petites que l'unité, nous pouvons donner l'interprétation mathématique suivante :

⁷⁵- KOUIDRI, K. : *Tarīqat al-khaṭa'ayn fī at-tadlīd ar-riyyaḍī al-ʿarabī* [La méthode de fausse position dans la tradition mathématique arabe], Magister d'histoire des mathématiques arabes, Alger, E. N. S., 1999.

⁷⁶- AL-UQLĪDISĪ : *Al-Uqlīdisī, Kitāb al-fuṣūl fī l-ḥisāb al-hindī*, op. cit., p. 218

$$\sqrt{A} = \sqrt{n^2 + r} = n + u \quad \text{d'où} \quad A = (n + u)^2 = n^2 + 2nu + u^2$$

Puis, en posant $u^2 \approx \frac{u}{2}$ on aboutit à la relation $A - n^2 \approx 2nu + \frac{u}{2}$.

$$\text{D'où} \quad u \approx \frac{A - n^2}{2n + \frac{1}{2}}.$$

Formule 4

$$\sqrt{A} = \sqrt{n^2 + r} \approx n + \frac{(A - n^2)}{2n - 1}$$

Cette formule n'a pas été énoncée dans les ouvrages que nous avons consultés. Mais, c'est probablement celle qu'Abū l-Wafā a appliquée pour trouver la valeur approchée

suivante : $\sqrt{300} \approx 17 + \frac{1}{3}$ ⁷⁷.

$$\text{L'erreur est par excès car} \quad \left(n + \frac{r}{2n-1}\right)^2 = A + \frac{r}{2n-1} + \left(\frac{r}{2n-1}\right)^2.$$

Nous signalons aussi que ce procédé est moins précis que tous ceux que nous avons exposés.

Formule 5

$$\sqrt{A} \approx \frac{\left[\sqrt{A \cdot 10^{2n}} \right]}{10^n}$$

Dans son analyse du contenu d'une version latine du *Calcul indien* d'al-Khwārizmī, M. Folkerts s'est basé sur un passage du dix-huitième chapitre pour dire que l'auteur s'était inspiré des procédés indiens pour énoncer cette formule. Ces procédés ne pourraient être que ceux explicitant l'algorithme d'extraction de la racine carrée⁷⁸. Nous signalons que la

⁷⁷- Abū l-Wafā a précisé que le nombre $17 + \frac{1}{3}$ est une valeur approchée du côté du carré qui est égal à la somme de trois carrés égaux dont le côté est égal à dix. ABŪ L-WAFĀ : *Kitāb fī mā yahtāju ilayhī aṣ-ṣāniō min aḥmāl al-handasa* [Livre sur ce qui est nécessaire à l'artisan en constructions géométriques], op. cit., p. 147.

⁷⁸- FOLKERTS, M. & KUNITZSCH, P. : *Die Altteste Lateinische Schrift Uber das Indische Rechnen Nach al-Hwārizmī*, op. cit., p. 180.

meilleure valeur qui a été attribuée au nombre $\sqrt{2}$ dans l'ouvrage d'al-Khwārizmī a été obtenue en appliquant cette formule⁷⁹.

Nous pouvons aussi vérifier que dans le cas général lorsque n est grand la valeur est plus précise. Effectivement, en écrivant $\sqrt{A} = \frac{\sqrt{A \cdot 10^{2n}}}{10^n}$ nous constatons que :

Si $n=0$ alors $\left[\sqrt{A} \right] = \overline{p_k p_{k-1} \dots p_s}$ est l'entier calculé en appliquant l'algorithme d'extraction de la racine carrée du nombre A .

Si $n=1$ on obtient $\left[\sqrt{A \cdot 10^2} \right] = \overline{p_k p_{k-1} \dots p_s p_{s-1}}$ en appliquant le même algorithme sur le même nombre auquel sont ajouté deux zéros à droite. Le chiffre p_{s-1} est déterminé à partir du reste de la première application de l'algorithme (c.-à-d. pour $n=0$) augmenté de deux zéros à droite.

Si $n=2$ on obtient $\left[\sqrt{A \cdot 10^4} \right] = \overline{p_k p_{k-1} \dots p_s p_{s-1} p_{s-2}}$ en continuant l'algorithme précédent sur le second reste auquel sont ajouté deux zéros à droite.

Ainsi, pour $n=3$ on détermine le chiffre p_{s-3} et pour $n=4$ on déterminera le chiffre p_{s-4} . A chaque valeur de n sera déterminé le chiffre p_{s-n} .

Si n est choisi très grand alors le nombre des chiffres p_{s-n} , calculés en appliquant l'algorithme d'extraction de la racine, est aussi très grand. Et la division du résultat de cette opération, qui est $(\overline{p_k p_{k-1} \dots p_s p_{s-1} p_{s-2} \dots p_{s-n}})$, par 10^n détermine la partie fractionnaire du nombre \sqrt{A} représentée par les chiffres p_{s-m} avec $1 \leq m \leq n$.

Nous remarquons que les étapes de ce calcul sont basées sur l'algorithme de la multiplication d'un nombre par lui-même.

Nous signalons aussi que ces calculs sont parfois complétés par un procédé qui vise à exprimer la partie fractionnaire dans la base sexagésimale. Cette méthode secondaire consiste à multiplier et à diviser la fraction par des puissances positives de 60. C'est ce qu'a fait al-Khwārizmī lorsqu'il a donné l'approximation suivante $\sqrt{2} \approx 1;24,50,24$ à partir de la valeur $\sqrt{2} \approx 1,414$ qu'il a calculée en utilisant la formule 5 pour $n=3$ ⁸⁰.

⁷⁹- ALLARD, A. : *Muhammad Ibn Mūsā al-Khwārizmī, Le calcul indien (Algorismus)*, op. cit., pp. 58-61.

⁸⁰- FOLKERTS, M. & KUNITZSCH, P. : *Die Alteste Lateinische Schrift Uber das Indische Rechnen Nach al-Hwārizmī*, op. cit., p. 180.

Al-Bghdādī a lui aussi écrit la partie fractionnaire de la valeur approchée du nombre $\sqrt{5}$ dans la base sexagésimale⁸¹. C'est aussi ce qu'a fait al-Uqlīdisī lorsqu'il a donné l'approximation suivante $\sqrt{2} \approx 1; 24, 36$ ⁸².

Dans les ouvrages du X^e siècle, ce procédé a été nommé *procédé d'approximation par les zéros*. Il a été le plus étudié et le plus développé. Il a aussi eu plusieurs formulations :

$$\sqrt{A} = \frac{\left[\sqrt{A \cdot 60^{2n}} \right]}{60^n}, \quad \sqrt{A} = \frac{\left[\sqrt{A \cdot b^2} \right]}{b}, \quad \sqrt{A} = \frac{\sqrt{A \cdot b^2}}{b}, \quad \sqrt{A} = \frac{\left[\sqrt{A \cdot b^{2n} \cdot c^{2m}} \right]}{b^n \cdot c^m}$$

Bien que le choix des nombres b et c très grand n'a pas été justifié pourtant cette affirmation a été répétée dans la majorité des ouvrages. Il est très probable que cette remarque ait été constatée après l'application du procédé sur plusieurs nombres.

As-Samaw'al al-Maghribī avait exposé ce procédé dans un ouvrage intitulé *Kitāb at-Tabṣira fī ōilm al-ḥisāb* [Livre qui fait comprendre la science du calcul]. Puis il a explicité ses étapes dans *al-Qiwāmī fī l-ḥisāb*⁸³ en introduisant la technique du tableau. Aussi, pour calculer une valeur approchée du nombre $\sqrt{10}$, il a d'abord déterminé la partie entière de la racine en appliquant l'algorithme de la racine carrée. Puis, en ajoutant deux zéros à droite du reste il a procédé à la détermination du premier chiffre de la partie fractionnaire en appliquant toujours le même algorithme. Ensuite il a ajouté deux zéros à droite du nouveau reste et il a répété l'algorithme pour déterminer le deuxième chiffre de la partie fractionnaire. Ainsi, la création de nouvelles positions à droite se fait par étape et le processus est contrôlé selon la précision qu'on veut atteindre. As-Samaw'al a en plus montré comment la méthode des tableaux peut s'appliquer pour l'extraction de la racine d'ordre supérieur. Pour cela, il a choisi comme exemple la racine cinquième d'un nombre fractionnaire. Le résultat de l'opération est exact mais les précisions, qu'il a données permettent d'étendre la méthode pour le calcul approché de la racine d'ordre supérieur. Pour l'exemple de la racine carrée, il a donné le résultat suivant à six chiffres après la virgule : $\sqrt{10} \approx 3,162277$.

⁸¹- AL-BAGHDĀDĪ : *At-Takmila fī l-ḥisāb al-hindī*, op. cit., pp. 79-80.

⁸²- AL-UQLĪDISĪ : *Kitāb al-fuṣūl fī l-ḥisāb al-hindī*, op. cit., pp. 218-222, 134.

⁸³- RASHED, R. : *Entre arithmétique et algèbre. Recherches sur l'histoire des mathématiques arabes*, op. cit., pp. 122, 144-145.

An-Nīshābūrī a signalé qu'à travers ce procédé on obtient une valeur plus grande que celle calculée par la formule 2 mais il n'a pas donné d'autres précisions sur cette comparaison⁸⁴.

Al-Kāshī a proposé de poursuivre les calculs entrepris par cette méthode en utilisant une technique qu'il a appelée *la règle des calculateurs*⁸⁵. Pour mieux suivre sa démarche, nous reprenons l'exemple, qu'il a traité.

D'abord, il a utilisé la méthode du tableau pour calculer $\sqrt{145}$ et il a obtenu le résultat suivant :

$$\sqrt{1450000} = \sqrt{(1204)^2 + 384}$$

Puis, il a proposé de continuer les calculs ainsi : $\sqrt{145} \approx 12 + \frac{4 \cdot (2 \cdot 1204 + 1) + 384}{(2 \cdot 1204 + 1) \cdot 100}$.

Le nombre 4 représente le chiffre qui est déterminé par l'algorithme de l'extraction de la racine carrée du nombre $(145 \cdot 10^4) = 1450000$.

Al-Kāshī a précisé que le nombre $\left(12 + \frac{167}{4015}\right)$, obtenu en appliquant cette technique, est plus proche de la valeur réelle du nombre irrationnel $\sqrt{145}$ que $\frac{1204}{100} = 12,04$ obtenu en appliquant la formule 5⁸⁶.

La terminologie qu'il a utilisée permet de faire une généralisation du procédé aux racines d'ordre supérieur.

Formule 6

Soit x_1 la première valeur approximative du nombre irrationnel \sqrt{A} , calculée en appliquant la formule 2. Le terme général de la suite $(x_n)_n$, qui détermine les valeurs approchées de \sqrt{A} , est défini comme suit :

⁸⁴- ABASSI, A. : *Le calcul de la racine n^{ième} d'un nombre chez al-Ḥasan an-Nīshābūrī (XIV^e siècle)*, op. cit., p. 30.

⁸⁵- AL-KĀSHĪ : *Miftāḥ al-ḥisāb*, op. cit., p. 98.

⁸⁶- Op. cit., pp. 97-98.

$$\sqrt{A} = \sqrt{n^2 + r} \approx x_n = \begin{cases} x_{n-1} + \frac{|x_{n-1}^2 - A|}{2n}, & \text{si } (x_{n-1}^2 - A) < 0 \\ x_{n-1} - \frac{|x_{n-1}^2 - A|}{2n}, & \text{si } (x_{n-1}^2 - A) > 0 \end{cases}, \quad n \geq 2$$

C'est le principe des approximations successives, qui a été énoncé par as-Samaw'al al-Maghribī. Ce dernier a aussi signalé que certaines valeurs, calculées par cette méthode, sont par excès et d'autres sont par défaut mais il n'a pas justifié le résultat qu'il a énoncé ainsi « *Nous pouvons ainsi obtenir des quantités rationnelles dont le nombre est infini et dont chacune est plus proche que celle qui la précède de la quantité que l'on cherche à approcher* »⁸⁷.

La suite d'as-Samaw'al peut être formulée ainsi : $x_n = x_{n-1} + \frac{A - x_{n-1}^2}{2n}$. Et la précision du procédé est faible par rapport à celle du procédé d'itération connu en Occident musulman⁸⁸.

Formule 7

$$\sqrt{A} = \sqrt{n^2 + r} \approx n + \left(\frac{r \cdot 60}{2n}\right) \frac{1}{60} \quad \text{si } r \leq n$$

$$\sqrt{A} = \sqrt{n^2 + r} \approx n + \left(\frac{(r+1) \cdot 60}{2n+2}\right) \frac{1}{60} \quad \text{si } r > n$$

Cette formule a été énoncée par Ibn al-Majdī (m. 1447) dans son ouvrage intitulé *Kashf al-ḥaqā'iq fī ḥisāb ad-daraj wa d-daqā'iq*.

Elle exprime le principe du procédé d'approximation connu dans la tradition de l'Occident musulman. Sa présence dans un ouvrage rédigé en Orient est un témoignage sur la circulation des idées de l'Occident vers l'Orient⁸⁹.

⁸⁷- RASHED, R. : *Entre arithmétique et algèbre. Recherches sur l'histoire des mathématiques arabes*, op. cit., p. 118.

⁸⁸- L'étude de la convergence de la suite d'as-Samaw'al a été déjà signalée par Roshdi Rashed. Voir RASHED, R. : *Entre arithmétique et algèbre. Recherches sur l'histoire des mathématiques arabes*, op. cit., p. 119.

⁸⁹- Nous signalons qu'Ibn al-Majdī est un des commentateurs du *Talkhīṣ* d'Ibn al-Bannā (m. 1321). Son commentaire est intitulé *Hāwī al-lubāb* [Le recueil de la moelle]. Voir ABALLAGH, M. & DJEBBAR, A. : *Hayāt wa mu'allafāt Ibn al-Bannā al-murrākushī* [La vie et l'œuvre d'Ibn-Bannā al-murrākushī], Rabat, Université Mahamed V, Publications de la faculté des Lettres et des Sciences Humaines, 2001, p. 94.

Ibn al-Majdī n'a pas justifié cette formulation mais en utilisant l'opération qui consiste à négliger des quantités très petites nous pouvons donner l'interprétation suivante :

On pose $\sqrt{n^2 + r} = n + u.60^{-1}$ avec $0 \leq u \leq 59$.

$A = (n + u.60^{-1})^2 = n^2 + 2n.u.60^{-1} + (u.60^{-1})^2$. Puis, en négligeant le dernier terme, on obtient : $u \approx \frac{(A - n^2).60}{2n}$ et $\sqrt{A} \approx n + \left(\frac{(A - n^2).60}{2n} \right) \frac{1}{60}$ qui est exactement l'expression d'Ibn

al-Majdī.

De la même manière, on retrouve la deuxième expression en utilisant l'écriture $(n+1) = \sqrt{n^2 + r} + u.60^{-1}$.

Ibn al-Majdī a proposé de poursuivre les calculs avec un procédé itératif qu'il a présenté comme un processus pour affiner l'approximation⁹⁰. Il ne l'a pas très bien décrit. Il a seulement donné l'expression de la partie fractionnaire de la valeur x_2 calculée par ce principe mais il n'a pas précisé si on doit l'ajouter à la valeur initiale x_1 (calculée par la formule 7) ou la lui soustraire.

Les deux expressions qu'il a énoncées sont :

$$\frac{\left((x_1)^2 - A \right).60 - \left(\left(\frac{r.60}{2n} \right) \frac{1}{60} \right)^2}{(2n).60 + 2 \left(\left(\frac{r.60}{2n} \right) \frac{1}{60} \right)} \quad \text{ou bien} \quad \frac{\left((x_1)^2 - A \right).60 - \left(\left(\frac{r+1}{2n+2} \right) \frac{1}{60} \right)^2}{(2n).60 + 2 \left(\left(\frac{r+1}{2n+2} \right) \frac{1}{60} \right)}$$

Nous avons essayé de formuler ce principe en choisissant les exemples suivants :

Exemple 1

Pour calculer $\sqrt{2}$ nous avons obtenu les résultats suivants :

$$\sqrt{2} \approx 1 + \frac{30}{60}, \quad \text{et} \quad (1;30)^2 = 2;15.$$

Pour affiner cette valeur qui est par excès, on calcule x_2 ainsi :

⁹⁰ - Cette méthode a été utilisée par Ptolémée dans l'*Almageste* puis explicitée par Théon : Voir Annexe 1.

$$x_2 = 1 + \frac{30}{60} - \frac{\left(\frac{15}{60}\right).60 - \left(\left(\frac{1.60}{2}\right)\frac{1}{60}\right)^2}{(2).60 + 2\left(\left(\frac{.60}{2}\right)\frac{1}{60}\right)} = 1;23$$

Cette deuxième valeur est plus proche de 2 que la première car $(1;23)^2 = 2;2,49$.

Exemple 2

$$\sqrt{50} = \sqrt{7^2 + 1} \approx 7 + \frac{3.60}{14} = 7;4 \quad \text{et} \quad (7;4)^2 = 49;56,16.$$

Pour affiner cette valeur qui est par défaut, nous calculons x_2 ainsi :

$$x_2 = 7 + \frac{4}{60} + \frac{(0;3,44).60 - (0;4)^2}{(2.7).60 + 2(0;4)} = 7 + \frac{4}{60} + \frac{15}{60^2} = 7;4,15$$

x_2 est elle aussi par défaut mais elle est plus précise que la précédente car $(7;4,15)^2 = 49;59,48,3,45$

Ainsi, la formulation du procédé itératif peut être donnée comme suit :

Formule 8

Soit x_1 la valeur approchée du nombre irrationnel \sqrt{A} obtenue par la formule 7.

Si x_1 est par excès alors :

$$x_2 \approx x_1 - \frac{\left(\left|x_1\right|^2 - A\right).60 - \left(\left(\frac{r.60}{2n}\right)\frac{1}{60}\right)^2}{(2n).60 + 2\left(\left(\frac{r.60}{2n}\right)\frac{1}{60}\right)} \quad \text{ou} \quad x_2 \approx x_1 - \frac{\left(\left|x_1\right|^2 - A\right).60 - \left(\left(\frac{r+1}{2n+2}\right)\frac{1}{60}\right)^2}{(2n).60 + 2\left(\left(\frac{r+1}{2n+2}\right)\frac{1}{60}\right)}$$

Si x_1 est par défaut alors :

$$x_2 \approx x_1 + \frac{\left(\left|x_1\right|^2 - A\right).60 - \left(\left(\frac{r.60}{2n}\right)\frac{1}{60}\right)^2}{(2n).60 + 2\left(\left(\frac{r.60}{2n}\right)\frac{1}{60}\right)} \quad \text{ou} \quad x_2 \approx x_1 + \frac{\left(\left|x_1\right|^2 - A\right).60 - \left(\left(\frac{r+1}{2n+2}\right)\frac{1}{60}\right)^2}{(2n).60 + 2\left(\left(\frac{r+1}{2n+2}\right)\frac{1}{60}\right)}$$

Formule 9

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a.b}}{b}$$

Cette formule a été énoncée par al-Khwārizmī dans le but d'étendre le calcul approché de la racine carrée aux nombres fractionnaires⁹¹.

Sur un exemple précis, il a explicité l'idée du procédé de la manière suivante $\sqrt{\frac{a}{b}} \approx \frac{[\sqrt{a.b}]}{b}$ où $[\sqrt{a.b}]$ exprime la partie entière du nombre irrationnel $\sqrt{a.b}$, obtenu en appliquant l'algorithme d'extraction de la racine carrée du produit $(a.b)$. La fraction définie par la division du reste, obtenu par cet algorithme, par le dénominateur a été négligé sans être signalée.

Al-Khwārizmī a aussi utilisé la formule suivante : $\sqrt{\frac{a}{b}} \approx \frac{[\sqrt{(a.b).b^2}]}{b^2}$.

Al-Uqlīdisī a précisé que si la valeur approchée du nombre $\sqrt{a.b}$, posée u , est calculée à travers les procédés d'approximation consacrés pour affiner l'approximation alors $\frac{u}{b} > \frac{[\sqrt{a.b}]}{b}$. De ce fait, $\frac{u}{b}$ serait une approximation très précise⁹².

Il a aussi formulé le procédé de la manière suivante $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right).b^2}}{b}$. Puis, pour affiner l'approximation, il a proposé la formule $\sqrt{\frac{a}{b}} \approx \frac{[\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right).b^{2n}.10^{2n}}]}{b^n.10^n}$.

Quant à al-Baghdādī, il a clairement annoncé que le numérateur est calculé en appliquant des procédés d'approximation⁹³. C'est aussi ce qui a été confirmé par al-Karajī et al-Kāshī⁹⁴.

I.2.2.b Les procédés d'approximation de la racine cubique d'un nombre

Comme pour la racine carrée, toutes les formules que nous allons présenter sont basées sur la relation, qui lie deux nombres cubes consécutifs : $(n+1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1$.

⁹¹- ALLARD, A. : *Muhammad Ibn Mūsā al-Khwārizmī, le calcul indien (Algorismus), Versions latines du XIIIe siècle*, op. cit., pp. 55-57. FOLKERTS, M. & KUNITZSCH, P. : *Die Alteste Lateinische Schrift Uber das Indische Rechnen Nach al-Hwārizmī*, op. cit., p. 179.

⁹²- AL-UQLĪDISĪ : *Kitāb al-fuṣūl fī l-ḥisāb al-hindī*, op. cit., pp.280-281, 367.

⁹³- AL-BAGHDĀDĪ : *At-Takmila fī l-ḥisāb al-hindī*, op. cit., pp. 134-136.

⁹⁴- AL-KARAJĪ : *Al-Kāfī fī l-ḥisāb*, op. cit., p. 121. AL-KĀSHĪ : *Miftāḥ al-ḥisāb*, op. cit., p. 95.

Et aussi sur l'assertion suivante : pour tout nombre non cube A il existe un nombre entier n tel que $n^3 \leq A < (n+1)^3$ et A s'écrit $A = n^3 + r$.

Formule 1

$$\sqrt[3]{A} = \sqrt[3]{n^3 + r} \approx n + \frac{A - n^3}{3n(n+1)+1}$$

Cette formule a été énoncée par al-Baghdādī⁹⁵, qui a précisé que le dénominateur de la fraction vérifie l'égalité $3n(n+1)+1=(n+1)^3 - n^3$.

Dans l'ouvrage d'as-Samaw'al⁹⁶ et dans celui de Naṣīr ad-dīn aṭ-Ṭūsī (m. 1274)⁹⁷ la formule est énoncée comme suit :

$$\sqrt[3]{A} = \sqrt[3]{n^3 + r} \approx n + \frac{A - n^3}{3n^2 + 3n + 1} = n + \frac{A - n^3}{(n+1)^3 - n^3}$$

Al-Ḥasan an-Nīshābūrī⁹⁸ n'a pas énoncé le procédé mais il a fait une description de l'algorithme qui permet de déterminer la valeur du terme $(3n^3 + 3n)$. Aussi, la formule pourrait être énoncée de la manière suivante : $\sqrt[3]{A} = \sqrt[3]{n^3 + r} \approx n + \frac{A - n^3}{(3n^2 + 3n)+1}$.

Al-Kāshī n'a pas traité le cas de la racine cubique mais comme an-Nīshābūrī il a utilisé la méthode du tableau pour décrire l'algorithme d'extraction de la racine carrée et de la racine cinquième. Il a aussi précisé que le dénominateur de la partie fractionnaire s'écrirait $(n+1)^3 - n^3$ et il l'a nommé *dénominateur conventionnel*.

Il a aussi appelé la fraction $\left[\frac{A - n^3}{(3n^2 + 3n)+1} \right]$ *fraction conventionnelle* et le procédé d'approximation *approximation conventionnelle*⁹⁹. Cette terminologie a été utilisée au XIII^e siècle par Naṣīr ad-dīn aṭ-Ṭūsī (1201-1274) dans son ouvrage intitulé *Jawāmi' al-ḥisāb bi t-*

⁹⁵ - AL-BAGHDĀDĪ : *At-Takmila fī l-ḥisāb al-hindī*, op. cit., pp. 89-90.

⁹⁶ - RASHED, R. : *Entre arithmétique et algèbre. Recherches sur l'histoire des mathématiques arabes*, op. cit, p. 140.

⁹⁷ - DJEBBAR, A. : *Les algorithmes et optimisation dans les mathématiques arabes*, op. cit, p. 138.

⁹⁸ - ABASSI, A. : *Le calcul de la racine n^{ième} d'un nombre chez al-Ḥasan an-Nīshābūrī (XIV^e siècle)*, op. cit, p. 36.

⁹⁹ - AL-KĀSHĪ : *Miftāḥ al-ḥisāb*, op. cit, p. 68, 71, 98.

takht wa t-turāb [Recueil sur le calcul par la planche et la poussière]¹⁰⁰. Nous signalons qu'an-Nīshābūrī ne l'a pas signalée dans le premier chapitre du deuxième genre de son ouvrage *ar-Riṣala ash-shamsiyya*.

Les auteurs des ouvrages que nous avons consultés n'ont donné aucun argument pouvant expliquer les différentes formulations du procédé ni leur généralisation. Ils n'ont fait aucune allusion aux deux méthodes suivantes qui pourraient être à l'origine de son énoncé :

En plus de la méthode de fausse position, il y a l'interpolation linéaire¹⁰¹ que nous présentons ainsi :

En considérant la fonction $f(x)=x^3$, passant par les deux points $M(n, f(n))$ et $N((n+1), f(n+1))$ et sachant que $f(n) < A < f(n+1)$ avec $A = f(\sqrt[3]{A})$, on peut écrire la relation suivante :

$$\frac{A - f(n)}{\sqrt[3]{A} - n} \approx \frac{f(n+1) - f(n)}{(n+1) - n}$$

$$\text{D'où l'approximation } \sqrt[3]{A} \approx n + \frac{A - n^3}{(n+1)^3 - n^3}.$$

Pour la deuxième méthode, nous pouvons utiliser la précision d'al-Baghdādī¹⁰² explicitant la relation $(3n^2 + 3n + 1) = (n+1)^3 - n^3$ avec l'idée de négliger des puissances des quantités plus petites que l'unité et proposer l'interprétation suivante :

On pose $\sqrt[3]{A} = n + v$, avec $0 < v < 1$.

$$\text{D'où } A = (n + v)^3 = n^3 + 3n^2v + 3nv^2 + v^3$$

Puis, en utilisant $v^3 \approx v^2 \approx v$, on obtient $A - n^3 = (3n^2 + 3n + 1)v$ d'où

$$v \approx \frac{A - n^3}{3n^2 + 3n + 1}.$$

Nous signalons que la valeur approchée calculée par ce procédé est par défaut. Ce résultat a été constaté au X^e siècle par al-Uqlīdisī. Pour le vérifier, nous donnons d'abord l'erreur en fonction du reste $r = A - n^2$ et de n :

¹⁰⁰ - DJABBAR, A. : Algorithmes et optimisation dans les mathématiques arabes, op. cit, p. 137

¹⁰¹ - Les deux méthodes ont été proposées par R. Rashed. RASHED, R. : *Entre arithmétique et algèbre*, op. cit., p. 117.

¹⁰² - AL-BAGHDĀDĪ : *At-Takmila fī l-ḥisāb al-hindī*, op. cit., p. 90.

$$\begin{aligned}
\left(n + \frac{r}{3n^2 + 3n + 1}\right)^3 &= n^3 + 3n^2 \frac{r}{3n^2 + 3n + 1} + 3n \frac{r^2}{(3n^2 + 3n + 1)^2} + \frac{r^3}{(3n^2 + 3n + 1)^3} \\
&= A + \left[3n \frac{r^2}{(3n^2 + 3n + 1)^2} + \frac{r^3}{(3n^2 + 3n + 1)^3} - \frac{(3n+1)r}{(3n^2 + 3n + 1)} \right] \\
&= A + \frac{r}{(3n^2 + 3n + 1)} \left[\frac{3nr}{(3n^2 + 3n + 1)} + \frac{r^2}{(3n^2 + 3n + 1)^2} - (3n+1) \right]
\end{aligned}$$

Puis, en utilisant l'inégalité $r < (3n^2 + 3n + 1)$ on obtient :

$$\frac{3nr}{(3n^2 + 3n + 1)} + \frac{r^2}{(3n^2 + 3n + 1)^2} - (3n+1) < 0 \quad \text{car} \quad \frac{3nr}{(3n^2 + 3n + 1)} < 3n \quad \text{et} \quad \frac{r^2}{(3n^2 + 3n + 1)^2} < 1$$

L'avantage de ce procédé d'approximation réside surtout dans le fait qu'il utilise d'une manière directe les résultats des opérations partielles effectuées dans l'algorithme de l'extraction de la racine cubique. La méthode du tableau représentant cet algorithme est, par ce fait, un moyen sûr et efficace assurant à la fois le calcul de la racine exacte et la détermination de la partie fractionnaire de la racine approchée.

Formule 2

$$\sqrt[3]{A} = \sqrt[3]{n^3 + r} \approx n + \frac{A - n^3}{3n^2 + 1}$$

C'est la formule qui a été proposée par Kushyār Ibn Labbān dans sa description de l'algorithme d'extraction de la racine cubique du nombre 2986100¹⁰³. Elle a, également, été utilisée par an-Nasawī¹⁰⁴ mais elle n'a pas été reprise par les mathématiciens postérieurs dont les ouvrages nous sont parvenus.

Ce procédé est peut être basé sur une idée principale qui consiste à réduire la valeur du dénominateur de la fraction de la formule 1 de façon à corriger l'erreur commise par le premier procédé.

¹⁰³- IBN LABBĀN : *Uṣūl ḥisāb al-hind*, op. cit., pp. 98-99.

¹⁰⁴- DJEBBAR, A. : Algorithmes et optimisation dans les mathématiques arabes, op. cit., p. 137.

Ainsi, trois formules auraient pu être suggérées : $n + \frac{A-n^3}{3n^2+1}$, $n + \frac{A-n^3}{3n^2+3n}$ et $n + \frac{A-n^3}{3n^2}$.

Elles vérifient : $n + \frac{A-n^3}{3n^2+1} > n + \frac{A-n^3}{3n^2+3n+1}$, $n + \frac{A-n^3}{3n^2+3n} > n + \frac{A-n^3}{3n^2+3n+1}$ et

$$n + \frac{A-n^3}{3n^2} > n + \frac{A-n^3}{3n^2+3n+1}.$$

1- Pour justifier la première formule on utilise l'idée de négliger des quantités plus petites que l'unité :

$$\text{On pose } A = (n+v)^3 = n^3 + 3n^2v + 3nv^2 + v^3.$$

Puis, en considérant $v^3 \approx 0$ et $v^2 \approx \frac{v}{3n}$, nous aurons : $A - n^3 \approx 3n^2v + v$.

$$\text{D'où } v = \frac{A - n^3}{3n^2 + 1}.$$

Cette formule présente quelques particularités. Tout d'abord, l'erreur exprimée en

fonction du reste $r = A - n^2$ et de n est la suivante : $\left[\frac{r}{3n^2+1} \left(\frac{3nr}{(3n^2+1)} + \frac{r^2}{(3n^2+1)^2} - 1 \right) \right]$

$$\left(n + \frac{r}{3n^2+1} \right)^3 = n^3 + 3n^2 \frac{r}{3n^2+1} + 3n \frac{r^2}{(3n^2+1)^2} + \frac{r^3}{(3n^2+1)^3}$$

car :

$$= A + \left[\frac{r}{3n^2+1} \left(\frac{3nr}{(3n^2+1)} + \frac{r^2}{(3n^2+1)^2} - 1 \right) \right]$$

De là, nous pouvons déduire que :

1- Si $A - n^3 \leq n$ l'erreur est par défaut. Par conséquent le procédé offre une approximation meilleure que le précédent puisque $n + \frac{A-n^3}{3n^2+3n+1} < n + \frac{A-n^3}{3n^2+1} < \sqrt[3]{A}$.

2- Si $A - n^3 > n$ l'erreur est par excès mais elle peut être inférieure à l'erreur commise par la formule 1 comme pour l'exemple $\sqrt[3]{11}^{105}$.

¹⁰⁵ - L'erreur vaut $\frac{6528}{6859}$ par le premier procédé et vaut $\frac{222}{2197}$ à travers le deuxième.

Comme elle peut être plus grande comme pour l'exemple $\sqrt[3]{18}$ ¹⁰⁶.

Nous pouvons vérifier aussi que si $r \geq 3n^2 + 1$ l'erreur est plus grande que $3n$. En revanche, l'erreur commise par le premier procédé est plus petite que deux car :

$$r \geq 3n^2 + 1 \Rightarrow \frac{3nr}{(3n^2 + 3n + 1)} > \frac{3n(3n^2 + 1)}{(3n^2 + 3n + 1)} \quad \text{et} \quad \frac{r^2}{(3n^2 + 3n + 1)^2} > \frac{(3n^2 + 1)^2}{(3n^2 + 3n + 1)^2}$$

Par conséquent :

$$\frac{r}{(3n^2 + 3n + 1)} \left[\left(\frac{3nr}{(3n^2 + 3n + 1)} + \frac{r^2}{(3n^2 + 3n + 1)^2} - (3n + 1) \right) \right] < 1 + \left(\frac{18n^3 + 9n^2 + 6n}{(3n^2 + 3n + 1)^2} - \frac{3n + 1}{3n^2 + 3n + 1} \right)$$

Si on pose $u = \left(\frac{18n^3 + 9n^2 + 6n}{(3n^2 + 3n + 1)^2} - \frac{3n + 1}{3n^2 + 3n + 1} \right)$, nous pouvons vérifier que $1 > u > 0$.

2- Nous n'avons pas trouvé l'énoncé de la deuxième formule, $n + \frac{A - n^3}{3n^2 + 3n}$, dans les

ouvrages que nous avons consultés.

3- Quant à la troisième formule, $n + \frac{A - n^3}{3n^2}$, elle a été énoncée avec la condition

$(A - n^3) < ((n + 1)^3 - A)$ au XIV^e siècle par Ya'īsh Ibn Ibrāhīm al-Amawī dans son ouvrage intitulé *Marāsim al-intisāb fī ma'ālim al-ḥisāb* [Les honneurs de l'affiliation sur les signes du calcul]. L'auteur a vécu à Damas mais son écrit contient certains procédés d'approximation qui sont connus uniquement dans l'Occident musulman. Son ouvrage contient aussi d'autres procédés qui n'ont pas été énoncés dans les écrits de l'Orient que nous avons consultés ni dans ceux de l'Occident qui sont actuellement accessibles. Ce mathématicien, qui est d'origine andalouse a certainement formulé des procédés d'approximation à partir de ceux qui sont connus dans les deux traditions¹⁰⁷.

¹⁰⁶- Pour ce cas précis, l'erreur à travers le premier procédé est par défaut et vaut $1 + \frac{6011}{6859}$. En revanche, elle est par excès à travers le deuxième procédé et elle vaut $3 + \frac{519}{2197}$.

¹⁰⁷- AL-AMAWĪ : *Marāsim al-intisāb fī ma'ālim al-ḥisāb* [Les honneurs de l'affiliation sur les signes du calcul], Saidan, A. S. ed, Alep : Université d'Alep, Institut d'Histoire des Sciences Arabes, 1981. Cet ouvrage est rédigé à Damas. Nous exposerons les formules d'approximation qu'il contient dans la deuxième partie de notre travail qui est consacré aux procédés d'approximation dans les ouvrages de l'Occident musulman et ce pour mieux montrer la contribution de ce mathématicien.

Formule 3

$$\sqrt[3]{A} \approx \frac{\left[\sqrt[3]{A \cdot 10^{3n}} \right]}{10^n}$$

Comme pour la racine carrée, nous pouvons vérifier qu'en choisissant n très grand on obtient une approximation plus précise. La valeur du numérateur est déterminée par l'algorithme de l'extraction de la racine cubique du nombre $(A \cdot 10^{3n})$. Et la division du résultat de cette opération par (10^n) détermine les n premiers chiffres de la partie fractionnaire de la racine. Ainsi, le choix de n dépendrait de la précision que l'on veut atteindre. C'est ce qu'a affirmé al-Baghdādī qui a nommé cette méthode de [procédé] par les zéros¹⁰⁸.

Al-Uqlīdisī a lui aussi évoqué ce procédé par le même nom mais il l'a énoncé d'une manière plus générale par la formule suivante : $\sqrt[3]{A} = \frac{\sqrt[3]{Ab^3}}{b}$. Il a aussi précisé que, plus le nombre par lequel on multiplie A est grand, plus on s'approche de la valeur réelle de la racine cubique¹⁰⁹.

Au XII^e siècle, as-Samaw'al al-Maghribī a explicité les étapes de ce procédé. Il a aussi proposé de poursuivre le processus indéfiniment mais il n'a pas utilisé d'exemples¹¹⁰.

An-Nīshābūrī a énoncé la formule : $\sqrt[3]{A} = \frac{\sqrt[3]{Ab^3}}{b}$, en précisant que la valeur du numérateur est déterminée par la formule 1¹¹¹.

Al-Kāshī a énoncé ce procédé dans le chapitre consacré aux fractions. Il a utilisé la méthode du tableau pour calculer la racine cubique exacte du nombre $\sqrt[3]{A \cdot 10^{3n}}$. Puis, il a exposé une règle de calcul pour déterminer la valeur de la partie fractionnaire du nombre $\sqrt[3]{A}$.

Pour expliciter sa méthode, on pose $u = \overline{u_1 u_2 \dots u_m} = \left[\sqrt[3]{A \cdot 10^{3n}} \right]$ le nombre obtenu par la méthode du tableau et r le reste avec $m > n$. Puis, on écrit $u = \overline{u_1 u_2 \dots u_n u_{n+1} \dots u_m}$ tel que $v = \overline{u_1 u_2 \dots u_n}$ représente la partie entière du nombre irrationnel $\sqrt[3]{A}$ obtenu par l'algorithme

¹⁰⁸- AL-BAGHDĀDĪ : *At-Takmila fī l-ḥisāb al-hindī*, op. cit., p. 90.

¹⁰⁹- AL-UQLĪDISĪ : *Kitāb al-fuṣūl fī l-ḥisāb al-hindī*, op. cit., p. 416-420.

¹¹⁰- RASHED, R. : *Entre arithmétique et algèbre. Recherches sur l'histoire des mathématiques arabes*, op. cit., p.145.

¹¹¹- ABASSI, A. : *Le calcul de la racine n^{ième} d'un nombre chez al-Ḥasan an-Nīshābūrī (XIV^e siècle)*, op. cit., p. 37.

d'extraction de la racine cubique de A . Et $w = \overline{u_{n+1}u_{n+2}\dots u_m}$ représente les chiffres obtenus en poursuivant l'algorithme après avoir ajouté $(3n)$ zéros à droite du reste obtenu dans la détermination de $v = \overline{u_1u_2\dots u_n}$.

La règle qu'al-Kāshī a énoncée est la suivante $\sqrt[3]{A} \approx v + \frac{w(3u^2 + 3u + 1) + r}{(3u^2 + 3u + 1)10^n}$

Elle exprime parfaitement l'approximation conventionnelle car d'après la formule 1

nous avons : $\sqrt[3]{A} = \frac{\sqrt[3]{A \cdot 10^{3n}}}{10^n} \approx \frac{1}{10^n} \left(u + \frac{r}{3u^2 + 3u + 1} \right) = v + \frac{1}{10^n} \left(w + \frac{r}{3u^2 + 3u + 1} \right)$.

La généralisation du procédé est donnée par l'expression suivante : $\sqrt[3]{A} = \frac{\sqrt[3]{Ab^{3p}}}{b^p}$

b peut prendre la valeur 10 ou 60 ou bien une autre valeur choisie selon les exemples traités.

Formule 4

Soit x_1 la première valeur approchée du nombre irrationnel $\sqrt[3]{A}$, calculée en appliquant la formule 1. On détermine les autres valeurs approchées comme les termes de la suite $(x_n)_n$,

définie comme suit : $\sqrt[3]{A} = \sqrt[n^3 + r]{} \approx x_n = \begin{cases} x_{n-1} + \frac{|x_{n-1}^3 - A|}{2n^2 + n}, & \text{si } (x_{n-1}^3 - A) < 0 \\ x_{n-1} - \frac{|x_{n-1}^3 - A|}{2n^2 + n}, & \text{si } (x_{n-1}^3 - A) > 0 \end{cases}$

C'est le procédé, qui a été énoncé par as-Samaw'al dans son ouvrage *al-Qiwāmī fī l-hisāb*. Il a donné l'expression de la deuxième valeur de la manière suivante

$x_2 = x_1 + \frac{A - x_1^3}{2n^2 + n}$ en précisant que la première valeur calculée par la formule 1 est par défaut. Il n'a donné aucune justification pourtant il a proposé d'étendre l'itération indéfiniment

afin d'obtenir une meilleure précision¹¹². Il a même proposé de généraliser le procédé aux racines d'ordre supérieur¹¹³.

¹¹²- RASHED, R. : *Entre arithmétique et algèbre. Recherches sur l'histoire des mathématiques arabes*, op. cit., p.118-119.

¹¹³- M. Guillemot a établi que la convergence de la suite dépend de la valeur attribuée au premier terme et aussi de la valeur du nombre dont on cherche la racine. Il a montré que l'exemple traité par as-Samaw'al représente un cas de convergence. Voir GUILLEMOT, M. : *Sur quelques algorithmes à travers un écrit d'as-Samaw'al*, op. cit.

Formule 5

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{\left(\frac{a}{b}\right).b^3}}{b}$$

C'est la formule qu'al-Uqlīdisī a énoncée en précisant, dans les exemples qu'il a traités, de prendre la valeur du numérateur égale à la partie entière du nombre irrationnel $\sqrt[3]{\left(\frac{a}{b}\right).b^3}$.

Mais, lorsque le numérateur ainsi que le dénominateur sont des cubes parfaits, il a appliqué l'égalité suivante $\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$ ¹¹⁴.

C'est aussi ce qu'a énoncé al-Baghdādī pour ce cas précis. Mais dans le cas de l'irrationalité du numérateur ou du dénominateur, il a énoncé la formule suivante :

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{ab^2}}{b}$$
 en précisant que la valeur du numérateur est déterminée par approximation¹¹⁵.

As-Samaw'al a répété ce qui a été établis avant lui par al-Uqlīdisī, al-Baghdādī et al-Karajī¹¹⁶. An-Nīshābūrī a évoqué la formule suivante : $\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{ab^2}}{b}$ en précisant que la valeur du numérateur est déterminée par la formule 1¹¹⁷.

Al-Kāshī a repris l'expression utilisée par an-Nīshābūrī avec quelques différences au niveau de la terminologie. Il a aussi proposé d'appliquer l'approximation conventionnelle pour calculer la racine cubique d'une fraction qui s'écrit comme somme d'un entier et d'une fraction inférieure à l'unité : $\frac{a}{b} = n + \frac{a'}{b'}$. Le procédé décrit peut être formulé comme suit :

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} \approx m + \frac{r}{3m^2 + 3m + 1}, \text{ avec } m = \left[\sqrt[3]{n} \right] \text{ et } r = r' + \frac{a'}{b'}, r' \text{ étant le reste obtenu dans le calcul de } m^{118}.$$

¹¹⁴ - AL-UQLĪDISĪ : *Kitāb al-fuṣūl fī l-ḥisāb al-hindī*, op. cit., pp. 420-422, 412.

¹¹⁵ - AL-BAGHDĀDĪ : *At-Takmila fī l-ḥisāb al-hindī*. op. cit., pp. 137-138.

¹¹⁶ - RASHED, R. : *Entre arithmétique et algèbre. Recherches sur l'histoire des mathématiques arabes*, op. cit., p. 120.

¹¹⁷ - ABASSI, A. : *Le calcul de la racine n^{ième} d'un nombre chez al-Ḥasan an-Nīshābūrī (XIV^e siècle)*, op. cit., pp. 37-38.

¹¹⁸ - AL-KĀSHĪ : *Miftāḥ al-ḥisāb*, op. cit., pp. 95-96.

I.2.2.c. Les procédés d'approximation de la racine d'ordre supérieur

Comme pour les sections précédentes, les formules que nous allons présenter sont basées sur la relation qui a été établie dans les ouvrages d'algèbre du XI^e siècle et qui est justifiée par ce que fournit le triangle arithmétique, c'est à dire :

$$(n+1)^p - n^p = \sum_{k=0}^{p-1} C_k^{p-k} n^k . \text{ Et aussi sur l'assertion suivante : pour tout entier } p, p \geq 2$$

et tout nombre A il existe un nombre entier n tel que $n^p \leq A < (n+1)^p$ et A s'écrit

$$A = n^p + r \text{ avec } r < \sum_{k=0}^{p-1} C_k^{p-k} n^k .$$

Formule 1

$$\sqrt[p]{A} = \sqrt[p]{n^p + r} \approx n + \frac{r}{(n+1)^p - n^p}$$

Cette formule a été utilisée par as-Samaw'al dans son ouvrage *al-Qiwāmi fī l-ḥisāb*¹¹⁹. An-Nīshābūrī l'a clairement énoncée pour $p=3$, après avoir exposé la méthode du tableau pour l'extraction de la racine d'ordre supérieur¹²⁰. Quant à al-Kāshī, il a fait une description détaillée du calcul du dénominateur de la fraction, qu'il a appelé *dénominateur conventionnel*. Il a utilisé des termes algébriques pour bien préciser les coefficients des puissances de n et il a donné une représentation générale des termes qui interviennent dans la formule.

Les valeurs obtenues par ce procédé d'approximation sont par défaut et l'erreur peut atteindre l'unité dans certains cas¹²¹.

Pour justifier la formulation, on utilise la généralisation de l'opération qui consiste à négliger des quantités très petites ainsi :

On pose $\sqrt[p]{A} = n + u$. Puis on écrit le développement de l'expression $(n+u)^p$.

Ensuite, en considérant $u^p \approx u^{p-1} \approx u^{p-2} \approx \dots \approx u^2 \approx u$ on aboutit à l'expression de la

$$\text{fraction } u \approx \frac{A - n^p}{(n+1)^p - n^p} .$$

¹¹⁹ - R. Rashed l'a parfaitement souligné dans son étude de quelques sections de cet ouvrage. Voir RASHED, R. : *Entre arithmétique et algèbre. Recherches sur l'histoire des mathématiques arabes*, op. cit., pp. 115-117.

¹²⁰ - ABASSI, A. : *Le calcul de la racine n^{ième} d'un nombre chez al-Ḥasan an-Nīshābūrī (XIV^e siècle)*, op. cit., pp. 31-37.

¹²¹ - Nous avons déjà exposé un exemple qui affirme cela dans le cas $p=3$.

Formule 2

$$\sqrt[p]{A} \approx \frac{\sqrt[p]{A.b^{p.n}}}{b^n}$$

C'est la formule qu'an-Nīshābūrī a énoncée pour $p=4$ mais il n'a pas utilisé d'exemples. Il est possible qu'il l'ait appliquée de la manière suivante :

$$\sqrt[p]{A} \approx \frac{\left[\sqrt[p]{A.b^{p.n}} \right]}{b^n} \quad 122.$$

As-Samaw'al a, en plus, utilisé d'autres formules comme $\sqrt[p]{A} \approx \frac{\left[\sqrt[p]{A.10^{p.n}} \right]}{10^n}$ et ce

dans le but d'exprimer la valeur approchée en fonction des fractions décimales et de montrer qu'il est toujours possible d'atteindre la valeur approchée souhaitée¹²³.

Al-Kāshī a répété le procédé d'as-Samaw'al ensuite il a exposé un moyen qui permet de compléter les calculs. Nous pouvons généraliser sa méthode que nous avons déjà exposée dans le cas de la racine cubique ainsi :

On pose $B = \overline{u_1 u_2 \dots u_m}$ le nombre trouvé par l'algorithme de l'extraction de la racine d'ordre p du nombre $(A.10^{p.n})$ et r le reste avec $m > n$. Puis, on écrit $B = \overline{u_1 u_2 \dots u_n u_{n+1} \dots u_m}$ tel que $C = \overline{u_1 u_2 \dots u_n}$ représente la partie entière du nombre irrationnel $\sqrt[p]{A}$ obtenu par le même algorithme. Et $D = \overline{u_{n+1} u_{n+2} \dots u_m}$ représente les chiffres obtenus en poursuivant l'algorithme après avoir ajouté $(p.n)$ zéros à droite du reste, obtenu après la détermination de $C = \overline{u_1 u_2 \dots u_n}$.

$$\text{Ainsi, on calcule } \sqrt[p]{A} \approx C + \frac{D \cdot \left((B+1)^p - B^p \right) + r}{\left((B+1)^p - B^p \right) 10^n} \quad 124.$$

¹²²- ABASSI, A. : *Le calcul de la racine n^{ième} d'un nombre chez al-Hasan an-Nīshābūrī (XIV^e siècle)*, op. cit., p. 37.

¹²³- RASHED, R. : *Entre arithmétique et algèbre. Recherches sur l'histoire des mathématiques arabes*, op. cit., p. 120.

¹²⁴- AL-KĀSHĪ. : *Miftāḥ al-ḥisāb*, op. cit., p. 97.

Formule 3

Soit x_1 la première valeur approchée du nombre irrationnel $\sqrt[p]{A}$, calculée en appliquant la formule 1. On détermine d'autres valeurs approchées comme les termes de la suite $(x_n)_n$, définie comme suit :

$$\sqrt[p]{A} = \sqrt[p]{n^p + r} \approx x_n = \begin{cases} x_{n-1} + \frac{|x_{n-1}^p - A|}{(p-1)n^{p-1} + \sum_{k=1}^{p-2} n^k}, & \text{si } (x_{n-1}^p - A) < 0 \\ x_{n-1} - \frac{|x_{n-1}^p - A|}{(p-1)n^{p-1} + \sum_{k=1}^{p-2} n^k}, & \text{si } (x_{n-1}^p - A) > 0 \end{cases}$$

C'est le procédé, qui a été énoncé par as-Samaw'al dans son ouvrage *al-Qiwāmi*¹²⁵.

Formule 4

$$\sqrt[p]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[p]{a \cdot b^{p-1}}}{b}$$

An-Nīsābūrī a énoncé cette formule et l'a appliquée pour le calcul de $\sqrt[4]{\frac{5}{2}}$. Le résultat qu'il a donné, $\sqrt[4]{40} \approx 2 + \frac{12}{65}$, prouve qu'il a calculé le numérateur en appliquant la formule 1¹²⁶. Al-Kāshī a lui aussi énoncé le procédé en précisant d'appliquer l'approximation conventionnelle pour le calcul du numérateur¹²⁷.

¹²⁵ - RASHED, R. : *Entre arithmétique et algèbre. Recherches sur l'histoire des mathématiques arabes*, op. cit., p. 119. M. Guillemot a établi que pour $A = 2$ la suite converge vers la racine p^{ième} de 2. Voir GUILLEMOT, M. : *Sur quelques algorithmes à travers un écrit d'as-Samaw'al*, op. cit.

¹²⁶ - ABASSI, A. : *Le calcul de la racine n^{ième} d'un nombre chez al-Ḥasan an-Nīsābūrī (XIV^e siècle)*, op. cit., pp. 37-38.

¹²⁷ - AL-KĀSHĪ : *Miftāh al-ḥisāb*, op. cit., pp. 95-96.

I-3. Les procédés d'approximation dans les écrits d'algèbre de l'Orient musulman : Exemple l'ouvrage d'aṭ-Ṭūsī (XII^e s.)

L'étude des équations algébriques dans l'Orient musulman a commencé avec la publication de l'ouvrage algébrique d'al-Khwārizmī (m. 850) intitulé *al-Mukhtaṣar fī ḥisāb al-jabr wa l-muqābala* [L'Abrégé sur le calcul par la restauration et la comparaison]. La partie théorique de ce traité contient des algorithmes de résolution de six équations canoniques à coefficients strictement positifs formulées à partir des trois objets c, x, x^2 . Ainsi que des preuves sur la validité des algorithmes de résolution des équations de degré deux¹²⁸.

Les écrits, qui ont été rédigés après, ont traités les équations cubiques et celles qui se ramènent aux équations de degré inférieur ou égal à trois. ōUmar al-Khayyām (m. 1131) a établi une théorie géométrique des équations de degré inférieur ou égale à trois dans son ouvrage intitulé *Maqāla fī l-jabr wa l-muqābala* [Epître sur l'algèbre]. Il a distingué vingt-cinq équations à coefficients strictement positifs à partir des quatre objets algébriques suivants : c, x, x^2, x^3 . Puis, il a discuté l'existence de la solution de chacune en utilisant des notions géométriques comme la droite, le cercle et les sections coniques. Dans le cas des équations cubiques, il a montré l'existence d'une ou de deux solutions positives, comme abscisses d'un ou de deux points d'intersection de deux sections coniques, mais sans pouvoir déterminer leurs valeurs numériques¹²⁹.

A la fin du XII^e siècle, Sharaf ad-dīne aṭ-Ṭūsī s'est intéressé à l'étude des équations cubiques. Il a utilisé une méthode géométrique similaire à celle d'al-Khayyām pour prouver l'existence des solutions positives, ainsi qu'une méthode numérique qui propose un procédé itératif pour calculer la valeur de la solution.

Au XIV^e siècle, al-Kāshī a déclaré, dans son ouvrage *Miftāḥ al-ḥisāb*, avoir résolu des équations de degré inférieur ou égal à quatre dont il a estimé le nombre à quatre-vingt-quinze. Il a affirmé avoir pu résoudre en plus des vingt-cinq d'al-Khayyām et d'aṭ-Ṭūsī les soixante-dix restantes que personne n'avait étudiées avant lui. Il n'a pas présenté la méthode d'aṭ-Ṭūsī

¹²⁸- MUSHARRAFA, A. M. & MURSĪ, M. H. : *Kitāb al-jabr wa l-muqābala li Muḥammad b. Mūsā al-Khwārizmī*, Egypt, Dār al-kitāb al-ōarabī liṭ-ṭibāōa wa n-nashr, 1968, pp. 16-26.

¹²⁹- DJEBBAR, A. & RASHED, R. : *L'œuvre algébrique d'al-Khayyām*, Alep, Université d'Alep, I. H. A. S, 1981.

mais il a promis de faire un exposé de la sienne dans un autre ouvrage¹³⁰. Aucun document n'a été découvert jusqu'à présent prouvant la réalisation de ce projet important. Mais, nous signalons qu'une méthode d'al-Kāshī pour résoudre une équation du type $x^3 + q = px$ est connue de nos jours à travers un traité astronomique¹³¹.

Dans cette section, nous présentons la méthode numérique de Sharaf ad-dīn aṭ-Ṭūsī pour résoudre des équations de degré inférieur ou égal à trois. Mais avant, nous signalons que le contenu de son ouvrage sur *al-Muādalāt* [Les équations], qui contient la description de cette méthode, est encore inconnu dans sa version intégrale. La partie importante qui nous est parvenue a été réalisée au XIII^e siècle par un anonyme. D'après son propre témoignage, ce dernier a délibérément omis de rapporter certains passages du texte originel concernant des calculs qu'il a jugés longs et inutiles¹³².

Le traité d'aṭ-Ṭūsī s'insère dans la tradition algébrique qui traite de la théorie des équations de degré inférieur ou égal à trois exposée dans l'ouvrage de ūmar al-Khayyām. Deux méthodes caractérisent la résolution d'aṭ-Ṭūsī : la première est géométrique et la deuxième est numérique. Il a aussi emprunté une démarche nouvelle utilisant la notion de maximum d'une courbe pour prouver l'existence des solutions de certaines équations¹³³.

Les études, qui ont évoqué ou étudié le contenu de cet ouvrage important, ont certifié qu'aṭ-Ṭūsī a utilisé un calcul approché pour déterminer les chiffres des solutions des vingt cinq équations¹³⁴. Aussi, nous allons essayer de le montrer à travers quelques exemples. Mais avant cela nous donnons quelques indications sur les notions qui interviennent dans le raisonnement et les calculs d'aṭ-Ṭūsī.

Tout d'abord, nous rappelons que sa méthode s'inspire de l'algorithme d'extraction de la racine nième qui était déjà connue à partir du XII^e siècle.

¹³⁰ - AL-KĀSHĪ : *Miftāḥ al-ḥisāb*, op. cit., pp. 198-199.

¹³¹ - Nous exposerons cette méthode dans la prochaine section. Pour plus de renseignement voir YOUSCHKEVITCH, A. P. & ROSENFELD, B. A. : Al-Kāshī. In Ch. Gillespie (éd.) : *Dictionary of Scientific Biography*, New York, Scribner's Sons, 1981, vol 7, pp. 259-260.

¹³² - Dans son édition de cette version, R. Rashed a évoqué ce témoignage et a discuté l'intérêt de la partie manquante pour l'histoire du calcul numérique. Voir RASHED, R. : *Sharaf al-dīn al-Ṭūsī, Œuvres Mathématiques, Algèbre et géométrie au XII^e siècle*, Paris, Les Belles Lettres, 1986, pp. XXXVII-XLI, 2.

¹³³ - BOROWCZYK, J. : Preuve et complexité des algorithmes de résolution numérique d'équations polynomiales d'al-Ṭūsī et de Viète, *Actes du deuxième colloque maghrébin sur l'histoire des mathématiques arabes, Tunis le 1- 2- 3 décembre 1988*, Tunis, Maghreb-Edition, non daté, pp. 27-52.

¹³⁴ - En plus de R. Rashed, A. Djebbar a lui aussi présenté la méthode d'aṭ-Ṭūsī comme celle qui expose la résolution approchée d'une équation algébrique de degré trois. Voir DJEBBAR, A. : Algorithmes et optimisation dans les mathématiques arabes, op. cit., pp. 185-194.

Parmi les notions qu'aṭ-Ṭūsī a utilisé nous citons :

1- Dans la base décimale, lorsqu'un nombre entier N occupe $(n+1)$ positions il s'écrit $N = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}$. Et on pose $n+1 = d(N)$

2- L'ordre décimal de N est $ord(N) = n$ si $a_n \neq 0$

3- L'ordre décimale de la solution d'une équation algébrique de degré p , qui s'écrit $P(x) = b_0$ avec $P(x) = \sum_{k=1}^p b_k x^k$ et $b_p \neq 0$, est déterminé par $\left[\frac{d(b_0)}{p} \right] - 1$.

4- Pour déterminer la valeur de la solution d'une équation cubique dont l'ordre décimal est égal m , on l'écrit sous la forme $s = \overline{s_0 s_1 \dots s_m}$.

La méthode d'aṭ-Ṭūsī consiste à déterminer les chiffres s_i par un procédé itératif.

Un exemple de l'équation de degré deux du type $x^2 + ax = N$

$$x^2 + 31x = 112992 \dots\dots\dots(1)$$

On pose $P(x) = x^2 + 31x$

Les étapes de la résolution

1- La détermination de l'ordre décimal de la solution

$$r = \left[\frac{d(112992)}{2} \right] - 1 = 2$$

La solution est de l'ordre des centaines c'est-à-dire $s \in [10^2, 10^3[$:

$$s = \overline{s_0 s_1 s_2} = x_0 + x_1 + x_2 \quad \text{et} \quad x_i = s_i 10^{2-i}.$$

2- La détermination de la première valeur approchée de la solution

Cette valeur est $x_0 = s_0 10^2$. Pour la déterminer on recherche le plus grand chiffre s_0 dont le carré est inférieur ou égal à 11.

La condition qui est posée est due au fait que x_0 vérifie $s_0^2 \cdot 10^4 + 31 \cdot 10^2 s_0 = 112992$.

Ainsi, on trouve $s_0 = 3$. Et $s \approx 300$ est la première valeur approchée de la solution.

On pose $N_1 = N - P(x_0) = 13692$ et on passe à l'étape suivante :

3- La détermination de la deuxième valeur approchée de la solution

La deuxième valeur à déterminer s'écrit $y = x_0 + x_1 = (s_0 10^2 + s_1 10)$.

x_1 est solution de l'équation déduite de la première à travers l'égalité

$$P(x_0 + x_1) = P(x_0) + (2x_0 + 31)x_1 + x_1^2$$

Elle est déterminée comme une valeur approchée du nombre $x'_1 = \frac{N - P(x_0)}{(2x_0 + 31)}$,

$$\frac{N - P(x_0)}{(2x_0 + 31) \cdot 10} = \frac{13692}{6310} \approx 2 = s_1$$

D'où $s \approx 320$ est la deuxième valeur approchée de la solution.

On pose $N_2 = N - P(x_0 + x_1) = 672$ et on passe à l'étape suivante :

4- La détermination de la troisième valeur approchée de la solution

La troisième valeur à déterminer s'écrit $z = x_0 + x_1 + x_2 = (s_0 10^2 + s_1 10 + s_2)$.

x_2 est solution de l'équation déduite de la première à travers l'égalité

$$P(x_0 + x_1 + x_2) = P(x_0 + x_1) + (2(x_0 + x_1) + 31)x_2 + x_2^2.$$

Elle est déterminée comme une valeur approchée du nombre $x'_2 = \frac{N - P(x_0 + x_1)}{(2(x_0 + x_1) + 31)}$

$$\text{D'où } \frac{N - P(x_0 + x_1)}{(2(x_0 + x_1) + a)} = \frac{672}{671} \approx 1 = s_2$$

Généralisation du procédé

$$P(x) = x^2 + ax = N$$

Soit r l'ordre décimal de la solution. Celle-ci va s'écrire sous la forme

$$s = x_0 + x_1 + x_2 + \dots + x_r \text{ avec } x_i = s_i \cdot 10^{r-i}.$$

La détermination chiffre par chiffre de cette solution utilise deux notions :

1- Pour $x_0 = s_0 \cdot 10^r$, s_0 est considéré comme le plus grand entier $0 \leq s_0 \leq 9$ vérifiant $s_0^2 \leq N \cdot 10^{-2r}$.

2- Pour déterminer $x_1 = s_1 \cdot 10^{r-1}$ avec $0 \leq s_1 \leq 9$ on procède de la manière suivante :

$$s_1 = \frac{N - P(x_0)}{(2x_0 + a) \cdot 10^{r-1}}$$

On réitère le procédé pour trouver les chiffres restant :

$$s_i = \frac{N - P(x_0 + x_1 + \dots + x_{i-1})}{(2(x_0 + x_1 + \dots + x_{i-1}) + a) \cdot 10^{r-i}}.$$

Aṭ-Ṭūsī a proposé de déterminer la valeur de la solution à partir d'une représentation des chiffres des nombres N et a , qui sont les coefficients du polynôme, les uns par rapport aux autres. Il a distingué trois cas selon la comparaison de l'ordre de $\sqrt[3]{N}$ et celui de a . Dans certaines représentations comme celle qu'il a proposée pour l'équation (1), il a utilisé la notion de division pour déterminer la valeur des chiffres s_i , $i \geq 1$.

L'analyse du texte montre aussi que s_1 est obtenu en divisant $(N - P(x_0))$ par le nombre $(2x_0 + a)10^{r-1}$ dont le terme $(2x_0 + a)$ correspond parfaitement à $P'(x_0)$ qui est la valeur du polynôme dérivé $P'(x) = 2x + a$ au point $x_0 = 3 \cdot 10^2$.

Pour calculer s_2 , il a répété la même opération c'est-à-dire la division du reste $(N - P(x_0 + x_1))$ par le nombre $(2(x_0 + x_1) + a)10^{r-2}$ où $(2(x_0 + x_1) + a) = P'(x_0 + x_1)$ ¹³⁵.

Un exemple de l'équation de degré trois $x^3 + bx = N$

$$x^3 + 36x = 33087717 \dots \dots \dots (2)$$

On pose $P(x) = x^3 + 36x$

Les étapes de la résolution

1- La détermination de l'ordre décimal de la solution

$$r = \left[\frac{d(33087717)}{3} \right] - 1 = 2$$

La solution est de l'ordre des centaines. D'où $s \in [10^2, 10^3[$ et s s'écrit $s = \overline{s_0 s_1 s_2} = x_0 + x_1 + x_2$, avec $x_i = 10^{r-i}$

¹³⁵- Sur l'utilisation de la notion de dérivée dans l'ouvrage d'aṭ-Ṭūsī, deux études ont été publiées pour discuter ce volet important de la résolution des équations algébriques par les mathématiciens arabes. Il s'agit de l'étude de R. Rashed et de celle de J. P. Hogendijk. Voir RASHED, R. : *Sharaf al-dīn al-Ṭūsī, Œuvres Mathématiques, Algèbre et Géométrie au XII^e siècle*, op. cit. HOGENDIJK, J. P. : Sharaf al-Dīn al-Ṭūsī on the Number of Positive Roots of Cubic Equations, *Historia Mathematica*, n° 16, (1989), pp. 69-85.

2- La détermination de la première valeur approchée de la solution

Cette valeur est $x_0 = s_0 10^2$. L'auteur détermine le chiffre s_0 en le posant égal au plus grand entier dont le cube est inférieur ou égal à 33.

Effectivement, comme s_0 vérifie $s_0^3 \cdot 10^6 + 36 \cdot 10^2 s_0 = 33087717$ on trouve $s_0 = 3$.

D'où $s \approx 300$ est la première valeur approchée de la solution.

On pose $N_1 = N - P(x_0) = 6076917$ et on passe à l'étape suivante :

3- La détermination de la deuxième valeur approchée de la solution

La deuxième valeur à déterminer s'écrit $y = x_0 + x_1 = (s_0 10^2 + s_1 10)$.

x_1 est solution de l'équation déduite de la première à travers l'égalité

$$P(x_0 + x_1) = P(x_0) + (3x_0^2 + 36)x_1 + 3x_0x_1^2 + x_1^3.$$

Elle est déterminée comme une valeur approchée du nombre $x'_1 = \frac{N - P(x_0)}{(3x_0^2 + 36)}$.

$$\frac{N - P(x_0)}{(3x_0^2 + 36)10} = \frac{60076917}{2700360} \approx 2 = s_1$$

D'où $s \approx 320$ est la deuxième valeur approchée de la solution.

On pose $N_2 = N - P(x_0 + x_1) = 308197$ et on passe à l'étape suivante :

4- La détermination de la troisième valeur approchée de la solution

La troisième valeur à déterminer s'écrit $z = x_0 + x_1 + x_2 = (s_0 10^2 + s_1 10 + s_2)$.

x_2 est solution de l'équation déduite de la première à travers l'égalité

$$P(x_0 + x_1 + x_2) = P(x_0 + x_1) + (3(x_0 + x_1)^2 + 36)x_2 + (3(x_0 + x_1)x_2^2 + x_2^3).$$

Elle est déterminée comme une valeur approchée du nombre $x'_2 = \frac{N - P(x_0 + x_1)}{(3(x_0 + x_1)^2 + 36)}$

$$\text{D'où } \frac{N - P(x_0 + x_1)}{(3(x_0 + x_1)^2 + 36)} = \frac{308197}{306636} \approx 1 = s_2$$

Généralisation du procédé

On pose $P(x) = x^3 + ax = N$

Soit r l'ordre décimal de la solution. Cette dernière va s'écrire sous la forme suivante :

$$s = x_0 + x_1 + x_2 + \dots + x_r \text{ avec } x_i = s_i \cdot 10^{r-i}$$

La détermination chiffre par chiffre de cette solution utilise deux notions :

- 1- Pour $x_0 = s_0 \cdot 10^r$, s_0 est considéré comme le plus grand entier, $0 \leq s_0 \leq 9$, vérifiant $s_0^3 \leq N \cdot 10^{-3r}$.
- 2- Pour $x_1 = s_1 \cdot 10^{r-1}$ avec $0 \leq s_1 \leq 9$ on procède de la manière suivante :

$$s_1 = \frac{N - P(x_0)}{(3x_0^2 + a) \cdot 10^{r-1}}$$

Nous remarquons que $(3x_0^2 + a)$ correspond à la valeur du polynôme dérivé au point x_0 c'est à dire $P'(x_0)$. On pourra ainsi écrire :

$$s_1 = \frac{N - f(x_0)}{(3x_0^2 + a) \cdot 10^{r-1}} = \frac{N - f(x_0)}{P'(x_0) \cdot 10^{r-1}}$$

On réitère le procédé pour retrouver les chiffres restant :

$$s_i = \frac{N - P(x_0 + x_1 + \dots + x_{i-1})}{(3(x_0 + x_1 + \dots + x_{i-1})^2 + a) \cdot 10^{r-i}} = \frac{N - P(x_0 + \dots + x_{i-1})}{P'(x_0 + \dots + x_{i-1}) \cdot 10^{r-i}}$$

Avant d'effectuer ses calculs, at-Ṭūsī a signalé que la disposition des chiffres du nombre a par rapport à ceux du nombre N , où a et N sont les coefficients du polynôme, dépend de la comparaison des ordres suivants : $Ord(\sqrt{N})$, $Ord(\sqrt{a})$. Le cas que nous avons exposé est celui dans lequel on a $Ord(\sqrt{N}) > Ord(\sqrt{a})$.

La méthode at-Ṭūsī utilise les deux étapes exposées dans l'exemple précédent : La première consiste à chercher le plus grand chiffre dont le cube est inférieur ou égal à une quantité définie selon la disposition des coefficients du polynôme $P(x)$ par rapport au nombre N . La deuxième étape utilise la division pour la détermination des autres chiffres de la solution. D'après l'exemple que nous avons exposé, il s'agit de diviser $N_i = N - f(x_0 + \dots + x_{i-1})$ par le coefficient du terme linéaire qui intervient dans l'écriture de l'équation $f(x_0 + \dots + x_i)$ dont l'inconnue est x_i .

Lorsque $Ord(\sqrt{N}) \leq Ord(\sqrt{a})$, la disposition des nombres a et N ressemble beaucoup à celle de la division $(N \div a)$. C'est pourquoi aṭ-Ṭūsī a utilisé la division pour déterminer le premier chiffre de la racine.

Nous signalons aussi que dans tous les exemples d'aṭ-Ṭūsī, la solution est entière est vaut 321. Mais, nous pouvons vérifier que même dans le cas contraire il est possible de déterminer les chiffres de la solution approchée et d'arrêter le processus itératif à l'étape voulu.

Nous concluons cet exposé sur la résolution des équations de degré inférieur ou égal à trois, par le résultat qui affirme qu'aṭ-Ṭūsī a réellement appliqué le schéma Ruffini Horner¹³⁶.

¹³⁶- R, Rashed ainsi que J, Borowczyk ont signalé ce résultat important de manières différentes. Voir RASHED, R. : *Sharaf al-dīn al-Ṭūsī, Œuvres Mathématiques, Algèbre et Géométrie au XII^e siècle*, op. cit., pp. LXI-LXXVII. BOROWCZYK, J. : Preuve et complexité des algorithmes de résolution numérique d'équations polynomiales d'al-Ṭūsī et de Viète, op. cit., p. 35, 44.

I-4. Les procédés d'approximation dans certains ouvrages d'astronomie de l'Orient musulman

L'astronomie est un domaine qui utilise le calcul par approximation dans la conception des tables astronomiques et dans la résolution de certaines équations.

Les procédés d'approximation qui sont employés sont généralement ceux qui sont déjà établis par les mathématiciens, comme celui de la racine carrée. En outre, des procédés nouveaux ont été élaborés dans le but de résoudre les équations qui interviennent dans certains problèmes astronomiques. Parmi les écrits arabes qui en contiennent, nous évoquons *al-Qānūn al-masūdī* [Le canon masūdien] qui est un ouvrage important pour l'histoire de la trigonométrie¹³⁷. Dans ce traité al-Bīrūnī (m. 1048) s'est proposé de calculer le côté d'un enneagone régulier inscrit dans un cercle. Il a ramené la détermination de la valeur de ce côté à la résolution d'une équation du troisième degré au moyen de deux constructions et à l'utilisation d'un procédé particulier d'itération.

Dans cette section, nous proposons d'exposer cette étude d'al-Bīrūnī. Puis, nous donnerons un aperçu sur la méthode d'itération de Ḥabash al-Ḥāsib (IX^e s.) dans la résolution de l'équation dite de Kepler (m. 1630). Ensuite, nous présenterons la méthode d'al-Kāshī pour le calcul de $\sin 1^\circ$.

I-4.1. La détermination du côté de l'enneagone régulier par al-Bīrūnī

Al-Bīrūnī a consacré la troisième section du troisième chapitre de son ouvrage *al-Qānūn al-masūdī* au calcul du côté de l'enneagone régulier inscrit dans un cercle. Mais avant d'entamer cette étude, il a précisé que les formules, qui déterminent la valeur du côté de l'heptagone et de l'enneagone régulier, ne sont pas connues. Il a aussi signalé que le calcul du côté de l'heptagone a été abandonné en astrologie car le nombre premier 7 ne divise pas le nombre 360¹³⁸. Puis, il a exprimé le côté du triangle et du quadrilatère inscrits dans un cercle ainsi que celui du pentagone, de l'hexagone, de l'octogone et du décagone régulier en

¹³⁷- AL-BĪRŪNĪ : *al-Qānūn al-masūdī* (*Canon Masudicus*), INDIA, Edition dāiratu l-maōārif al-ōuthmāniyya (Osmania Oriental Publication Bureau) Hyderabad-Dn. 1373 / 1954.

¹³⁸- Il a donné cette précision dans le chapitre suivant sur le calcul de $\text{cord} 1^\circ$. AL-BĪRŪNĪ : *al-Qānūn al-masūdī* (*Canon Masudicus*), op. cit., p. 272, 297.

fonction du diamètre du cercle. Mais, concernant le côté de l'ennéagone, il a déclaré que sa valeur sera déterminée par approximation¹³⁹.

Dans son étude, il a montré que la détermination de cette valeur revient à résoudre des équations du troisième degré. Il a explicité la méthode au moyen de deux constructions. Puis, il a utilisé un procédé particulier d'itération qui repose essentiellement sur les résultats des différents théorèmes sur les cordes : la corde du double, de la moitié et du quart d'un arc dont la corde est connue, ainsi que la corde de la différence et de la somme de deux arcs dont les cordes correspondantes sont connues.

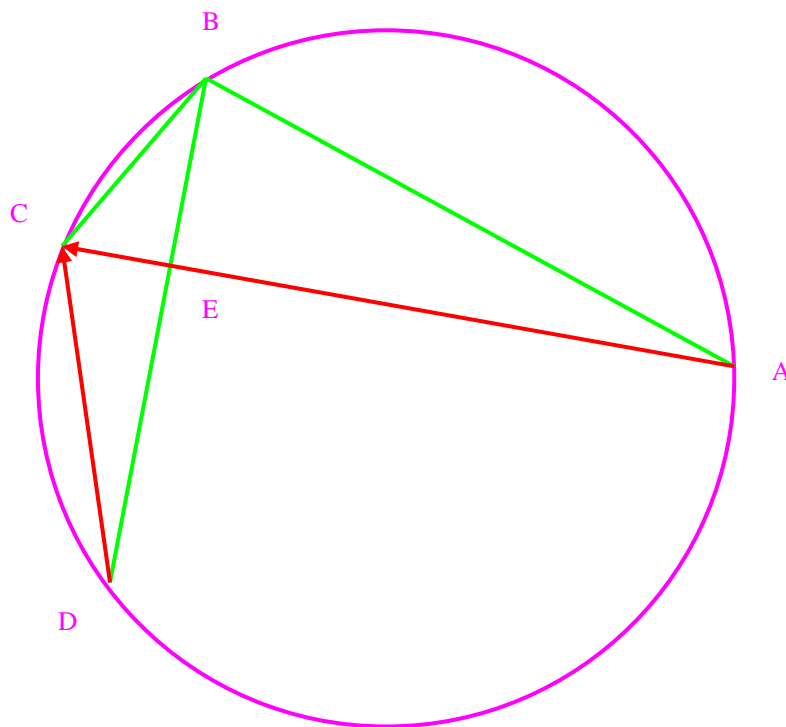
Mais, le résultat fondamental sur lequel repose son étude est celui qui exprime la relation liant les cordes des arcs dans un cercle donné. Il l'a énoncé sous forme d'un lemme qu'il a attribué à Archimède (m. 212 av. J. C.).

Lemme¹⁴⁰

Soit un arc ACD (définie sur un cercle donné). Les points A , C et D déterminent une ligne brisée en C à l'intérieur de cet arc. La perpendiculaire issue du milieu B de l'arc ACD rencontre le plus grand côté de la ligne brisée au point E en divisant la ligne brisée en deux parties égales : C'est-à-dire $AE = EC + CD$

¹³⁹- L'auteur n'a pas utilisé le mot *taqrīb* qui veut dire approximation mais plutôt les mots *hiyal* ou bien *tamaḥḥul* qui expriment le sens de l'idée ingénieuse. AL-BĪRŪNĪ : *al-Qānūn al-masā'ūdī*, op. cit., p. 273, 287.

¹⁴⁰- Al-Bīrūnī a précisé dans le titre de la première section que la démonstration qu'il donnera est différente de celle d'Archimède. Youschkevitch a signalé qu'al-Bīrūnī a écrit un traité sur ce lemme qu'il a intitulé *Risāla fī istikhrāj al-awtār fī dā'ira bi khawāṣ al-khaṭṭ al-munḥanī al-wāqīd fīhā* (Traité sur la détermination des cordes dans un cercle à l'aide d'une ligne brisée qui y est inscrite). Il y avait proposé plus de 20 démonstrations dont celle d'Archimède. Ce traité a été traduit en russe par S.A. Krasnova & L.A. Karpova, *Histoire des sciences et des techniques dans les pays de l'Orient*, fasc. III, Moscou, 1963. Pour plus d'informations voir YOUSCHKEVITCH, A. P. : *Les mathématiques arabes (VIIIe-XVe siècles)*, op. cit., p. 138, 185.



(figure 1)

Après avoir démontré le lemme, al-Bīrūnī s'est proposé de prouver les résultats fournies par les propositions 6 et 5 du livre II des *Eléments* d'Euclide appliquées sur les cordes AB , BC , AC et CD c'est-à-dire sur les parties de la droite brisée ACD dans le cercle.

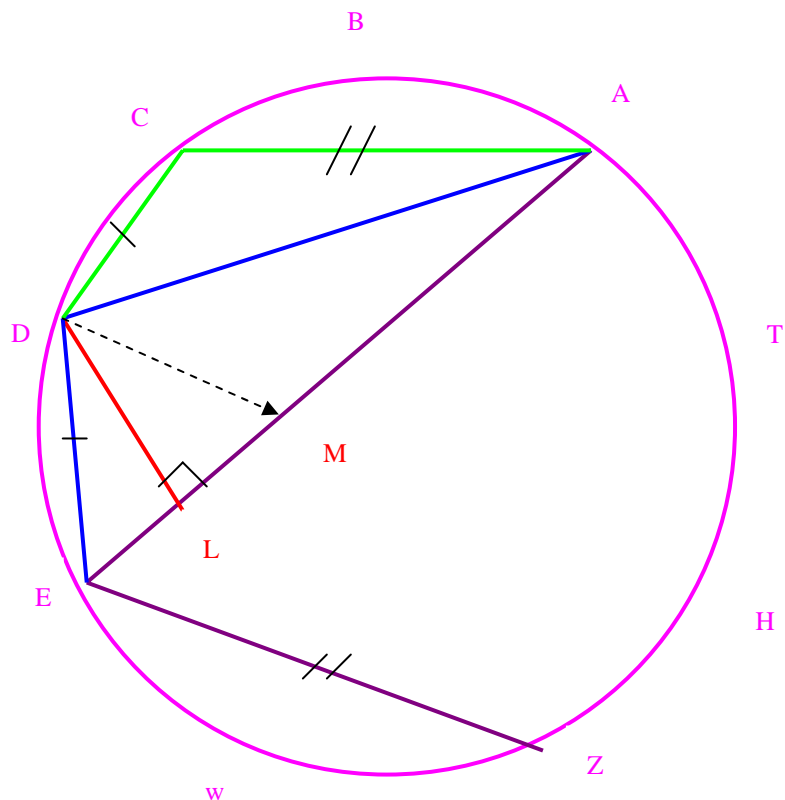
Le résultat le plus important, qu'il a démontré, est une adaptation de l'énoncé de la proposition 6 du livre II d'Euclide sur les cordes dont l'énoncé est le suivant :

Si un arc \widehat{ACD} d'un cercle est divisé en un point quelconque C et au milieu en B (fig 1) alors les cordes déterminées par cette division réalisent la relation : $AC \cdot CD + BC^2 = AB^2$

Il a aussi démontré d'autres résultats avant d'exposer deux méthodes pour déterminer la valeur du côté de l'ennégone régulier :

La première méthode

On divise un cercle en neuf arcs égaux aux points A, B, C, D, E, W, Z, H et T . Puis, on relie les points A et E , E et Z , tel que AE représente la corde de l'arc qui est égal au $\frac{4}{9}$ de la circonférence du cercle, EZ la corde de l'arc qui est égal au $\frac{2}{9}$ de la circonférence.



(Figure 2)

Si on considère AEZ une droite brisée dans l'arc \widehat{ADZ} et D le milieu de cet arc.

Et si DL est une perpendiculaire issue du point D sur AE et M tel que $LM = EL$ alors :

$$LE = \frac{1}{2}(AE - EZ), DE = EM \text{ et } AM = EZ \text{ et } \widehat{DEL} = \left(3\frac{\pi}{9}\right) = \frac{2}{3}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{141}.$$

On pose $DE = 1$ (unité) et $EZ = x$.

De l'égalité $AE \cdot EZ + ED^2 = AD^2$ on obtient l'équation :

$$(x+1)x+1^2 = AD^2 \dots\dots\dots(1)$$

Puis, en utilisant l'égalité $AD \cdot DE + DC^2 = AC^2$ avec $AC = EZ$ ¹⁴² et $DC = 1$, on obtient $AD = x^2 - 1$ (2)

De (1) et (2) découle l'équation suivante $x^4 + 1 - 2x^2 = x^2 + x + 1$

C'est ainsi qu'al-Bīrūnī aboutit à une équation du troisième degré : $1+3x=x^3$ dont la solution ne peut être déterminée que par approximation.

¹⁴¹- La relation découle du lemme d'Archimède c'est-à-dire : $AL = EL+EZ$. D'où $2EL = (AE-EZ)$.
¹⁴²- Ce sont des cordes qui interceptent des arcs égaux.

Il a proposé la solution $x \approx 1;52,45,47,13$ mais il n'a pas explicité les étapes du calcul qui permet de trouver cette valeur¹⁴³.

Ensuite, il a calculé la valeur du rapport $\frac{AD^2}{DE^2}$ en posant le côté de l'ennéagone égale à 1.

Avec $AE = 2;52,45,47,13$ et $AE.EZ + DE^2 = \frac{1074881469469889}{60^8}$ ¹⁴⁴, il obtient

$AD^2 = \frac{1074881469469889}{60^8} = b^2$ qui est le carré du côté du triangle inscrit dans le cercle.

D'où $\frac{AD^2}{DE^2} = AD^2 = c$ (cste) = $\frac{1074881469469889}{60^8}$.

Ainsi, en posant le diamètre $d = 2$ on obtient $b^2 = 3$ et $DE = \sqrt{\frac{3}{c}} \approx 0;41,2,32,41,55$ ¹⁴⁵.

Nous signalons qu'al-Bīrūnī a utilisé la numération alphabétique pour exprimer les résultats de ses calculs.

La deuxième méthode

Elle a été exposée par al-Bīrūnī dans le but de vérifier le résultat précédent. Cette méthode consiste à déterminer la valeur du côté de l'ennéagone en résolvant une équation cubique du type $x^3 + q = px$. Le raisonnement géométrique qu'il a utilisé est le suivant :

On considère un cercle de centre E de rayon R et deux points A et B de ce cercle tel que $A\hat{E}B = \left(\frac{1}{9}\right)\pi = 20^\circ$. D'où $E\hat{A}B = A\hat{B}E = \left(\frac{4}{9}\right)\pi$.

Soit C tel que $B\hat{A}C = \left(\frac{1}{4}\right)B\hat{A}E = \left(\frac{1}{9}\right)\pi$. Par conséquent $A\hat{C}B = \left(\frac{4}{9}\right)\pi$ et $AB = AC$

Les triangles ABC et EAB étant semblables alors $\frac{AE}{AB} = \frac{AB}{BC}$.

Ainsi, $AB^2 = AE.BC$

¹⁴³ - Al-Bīrūnī a utilisé l'expression « *bi l-istiqrā'* » c'est-à-dire par induction.

¹⁴⁴ - Pour le numérateur, les calculs que nous avons effectués ont abouti à : 1076953600589889

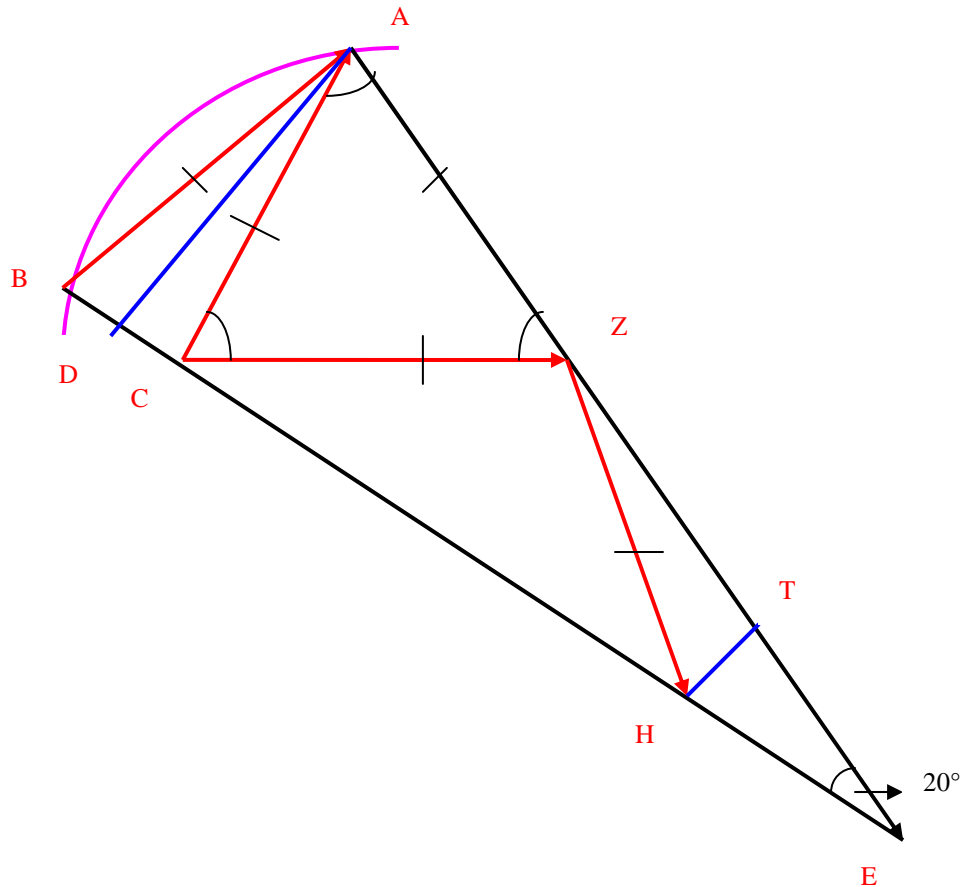
¹⁴⁵ - L'auteur a appliqué la formule donnant le côté du triangle inscrit dans un cercle qu'il a énoncée dans la deuxième section sans démonstration. Si on pose d le diamètre du cercle alors le côté du triangle qu'on note AD est donné par la formule $AD = \sqrt{d \cdot \frac{1}{2} \left(d + \frac{1}{2}d \right)}$.

Si on pose $AB = x$ et $AE = R = 1$ on obtient l'équation $x^2 = BC$

On considère alors le point Z tel que $CZ = AC$

Par comparaison des angles, on obtient $\widehat{AZC} = (\frac{3}{9})\pi$ et $\widehat{ECZ} = (\frac{2}{9})\pi$

Soit un autre point H tel que $ZH = ZC$. Alors $\widehat{ZHC} = (\frac{2}{9})\pi$ et $\widehat{ZHE} = (\frac{7}{9})\pi$



(Figure 3)

Par conséquent $\widehat{HZE} = (\frac{1}{9})\pi$ et $HE = ZH$

Ainsi $AB = AC = CE = CZ = ZH = HE = x$

Soient AD une perpendiculaire issue de A sur EB et HT une autre perpendiculaire issue de H sur EA .

Les triangles AED et HET sont alors semblables

Soit un point M dans le prolongement de EB tel que $ED = DM$

D'où $\frac{EH}{EZ} = \frac{AE}{EM}$ ¹⁴⁶(1)

$EZ = 1 - x$ et $EM = 2.ED = 2.EB - BC = 2 - x^2$

¹⁴⁶- Ceci découle du rapport $\frac{EH}{ET} = \frac{AE}{ED}$ (les triangles AED et AET étant semblables).

De (1) on obtient $\frac{x}{1-x} = \frac{1}{2-x^2}$. C'est-à-dire $x(2-x^2) = 1-x$

D'où l'équation du troisième degré : $x^3 + 1 = 3x$ dont la solution ne peut être calculée que par approximation.

La solution qu'al-Bīrūnī a proposée est $x = \text{cord}(20^\circ) \approx 0;20,50,16,1$

Aussi, $\text{cord}(40^\circ)$ est calculé à partir de la formule suivante : Si $a = \text{cord } \widehat{AB}$ alors

$$\text{cord } 2.\widehat{AB} = 2\sqrt{a^2 - \left(\frac{a^2}{d}\right)^2}, \quad d \text{ étant le diamètre du cercle}^{147}.$$

Le procédé d'itération

Al-Bīrūnī a achevé son étude par un procédé d'itération particulier qui est le suivant :

En choisissant le diamètre $d = 2$, il a proposé de calculer la corde de la moitié de l'arc du côté de l'hexagone régulier c'est-à-dire $\text{cord}(30^\circ)$. En appliquant la formule donnant la corde de la moitié d'un arc dont la corde est connue, il a donné la valeur suivante :

$$\text{cord}(30^\circ) = 0;3,8,29,49,38,1$$

Puis, il a proposé de calculer $\text{cord}(12^\circ)$ qui correspond à la corde de l'arc obtenu en divisant la circonférence du cercle en 30 parties égales. Or, $\left(\frac{1}{30}\right)360^\circ = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{6}\right)360^\circ = \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right)360^\circ$. Cette corde peut être calculée comme la corde de la différence de deux arcs dont les cordes correspondantes sont connues qui sont le côté du pentagone et le côté de l'hexagone.

Il obtient $\text{cord}(12^\circ) = 0;12,32,36,17,46$

Ensuite, il a poursuivi ses calculs ainsi, si on pose $S_1 = \text{cord}(30^\circ + 12^\circ) = \text{cord}(42^\circ)$

On obtient $S_1 = 0;43,14,17,15$ en utilisant la formule suivante :

$$\text{cord}(\alpha + \beta) = \left[\sqrt{\left(\frac{\text{cord}\alpha \cdot \text{cord}\beta}{d}\right)^2 - \frac{(\text{cord}\beta) \cdot (\text{cord}(\pi - \alpha))}{d}} \right] + \frac{(\text{cord}\beta) \cdot (\text{cord}(\pi - \alpha))}{d}$$

On pose d'abord $a = 30^\circ$ ¹⁴⁸. Puis on continue en procédant de la manière suivante :

On pose $a_1 = 30^\circ + \frac{1}{4}(42)^\circ = 40,5^\circ$ et en utilisant la formule ci-dessus on obtient

$$\text{cord}(a_1) = 0;41,32,2,34,6$$

¹⁴⁷ - La preuve de cette égalité est basée sur le théorème de Pythagore. Al-Bīrūnī n'a pas fait les calculs mais il a certifié que le résultat est identique à celui trouvé par la première méthode

¹⁴⁸ - C'est la valeur initiale qu'al-Bīrūnī a appelé *al-asl*.

On calcule $cord\left(\left(\frac{1}{4}\right)a_1\right) = cord\left(10 + \frac{1}{8}\right)^\circ = 0;10,35,20,42,13$ et ce en utilisant la formule suivante :

$$cord\left(\frac{1}{4}\alpha\right) = \sqrt{\frac{1}{2} \left[\frac{cord \frac{\alpha}{2} \left(\frac{1}{2} |d - cord \alpha| \right)}{cord \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2} cord \alpha} \right] . d}$$

Ensuite on pose $a_2 = 30^\circ + \frac{1}{4}(40,5)^\circ = \left(40 + \frac{1}{8}\right)^\circ$ et on calcule la corde en utilisant la première formule : $cord(a_2) = cord\left(40 + \frac{1}{8}\right)^\circ = 0;41,11,7,34,6$

Par la deuxième formule, on calcule $cord\left(\left(\frac{1}{4}\right)a_2\right) = cord\left(10 + \frac{1}{32}\right)^\circ = 0;10,20,9,28,38,26$

Et ainsi de suite on continue de la même manière :

$$a_3 = 30^\circ + \left(\frac{1}{4}\right)a_2 = \left(40 + \frac{1}{32}\right)^\circ \quad \text{et} \quad cord(a_3) = cord\left(40 + \frac{1}{32}\right)^\circ = 0;41,4,23,24,4$$

$$cord\left(\left(\frac{1}{4}\right)a_3\right) = cord\left(10 + \frac{1}{2 \times 4^3}\right)^\circ = 0;10,28,37,15$$

$$a_4 = 30^\circ + \left(\frac{1}{4}\right)a_3 = \left(40 + \frac{1}{2 \times 4^3}\right)^\circ \quad \text{et} \quad cord(a_4) = cord\left(40 + \frac{1}{2 \times 4^3}\right)^\circ = 0;41,3,22,39$$

·
·
·

$$a_{10} = 30^\circ + \left(\frac{1}{4}\right)a_9 = \left(40 + \frac{1}{2 \times 4^9}\right)^\circ \quad \text{et} \quad cord(a_{10}) = cord\left(40 + \frac{1}{2 \times 4^9}\right)^\circ = 0;41,2,32,44,29$$

Al-Bīrūnī a attribué au côté de l'ennéagone la valeur $a \approx a_{11} = 0;41,2,32,44,29$.

Il a signalé que cette valeur est plus grande que celle trouvée par les deux méthodes mais que la différence est faible.

Le procédé itératif d'al-Bīrūnī consiste à construire une suite $(a_n)_n$ définie ainsi :

$$a_n = 30^\circ + \left(\frac{1}{4}\right)a_{n-1} \quad \text{avec} \quad a_1 = \left(40 + \frac{1}{2}\right)^\circ$$

$$\text{Son terme général s'écrit } a_n = \left(40 + \frac{1}{2 \cdot 4^{n-1}}\right)^\circ$$

La suite converge vers $l = 40^\circ$ et permet d'atteindre une meilleure précision de la valeur du côté de l'ennéagone.

I-4.2. La résolution d'une équation trigonométrique par Ḥabash al-Ḥāsib¹⁴⁹

L'idée d'itérer le processus d'approximation, à partir d'une première valeur approchée, permet bien sûr d'améliorer l'approximation. Cette idée n'a pas été évoquée dans les ouvrages de calcul de l'Orient qu'il nous a été possible de consulter. Mais on la trouve dans, des textes astronomiques. Nous connaissons aujourd'hui deux problèmes qui ont été résolus par un procédé itératif.

Le premier a été traité au IX^e siècle par Ḥabash al-Ḥāsib pour l'établissement des tables astronomiques¹⁵⁰. Ces dernières utilisent la fonction $\Phi(t)=k \sin \theta$ et d'autres méthodes et procédures grecques connues à travers les tables de Ptolemée.

Ḥabash al-Ḥāsib a utilisé ce qui correspond à l'équation trigonométrique suivante :

$$x - a \sin x = b \text{ avec } 0 < a < 1, b \text{ réel.}$$

Pour calculer la valeur approchée d'une solution positive de cette équation, la méthode de Ḥabash consiste à construire la suite des nombres suivante :

$$\begin{cases} x_0(t) \\ x_n(t) = b + a \sin(x_{n-1}(t)) \end{cases} \quad ^{151}$$

Une interprétation graphique illustrant le raisonnement utilisé par ce calcul a été donnée par Kennedy ainsi qu'une démonstration sur la convergence de la suite.

Dans son étude, Kennedy a signalé que Ḥabash al-Ḥāsib a calculé le terme x_3 de cette suite. La valeur qu'il a trouvé est précise vu la rapidité suffisante de la convergence de la suite¹⁵².

¹⁴⁹- Nous donnerons un résumé sur l'étude, qui a été réalisée par E. S. KENNEDY, E. S. & W. R. TRANSUE, sur les méthodes itératives médiévales. Voir KENNEDY, E. S. & TRANSUE, W. R. : *A medieval Iterative Algorism, American Mathematical Monthly*, Vol. LXIII, n° 2, (1956) ; In KENNEDY, E. S. : *Studies in the Islamic Exact Sciences*, American University, Beirut, 1983, pp. 513-516.

¹⁵⁰- Le deuxième problème a été traité par al-Kāshī. Il sera exposé dans la section suivante.

¹⁵¹- Nous avons repris les notations de A. Djebbar : DJEBBAR, A. : Algorithmes et optimisation dans les mathématiques arabes, op. cit.

¹⁵²- C'est ce qu'a déclaré Kennedy après avoir démontré la convergence de la suite et avoir proposé une interprétation graphique pour illustrer le raisonnement utilisé. Voir KENNEDY, E. S. & TRANSUE, W. R. : *A medieval Iterative Algorism*, op. cit., pp. 515-516.

I-4.3. La détermination de la valeur de $\sin(1^\circ)$ par al-Kāshī

Dans cette section, nous allons exposer un problème qu'al-Kāshī a résolu en utilisant le principe d'itération. Mais avant d'entamer cette étude, nous rappelons que dans son ouvrage intitulé *Miftāh al-ḥisāb*, il n'a pas évoqué l'idée d'itération dans l'extraction de la racine n^{ième} d'un nombre. Il a donné une généralisation des procédés connus par ses prédécesseurs spécialistes du calcul indien. Il a également utilisé des fractions décimales pour approcher la racine. Mais à aucun moment il n'a fait allusion au principe d'itération pour améliorer l'approximation. Pourtant, ce principe ne lui est pas inconnu. Certains de ses travaux, qui ont été récemment étudiés et analysés, contiennent des méthodes d'approximation ayant pour idée principale la construction d'une suite de nombres qui s'approche de plus en plus vers la solution recherchée.

C'est le cas de son traité intitulé *ar-Risāla al-muḥīṭiyya* [Epître sur la circonférence] dans lequel il a calculé le rapport du périmètre d'un cercle à son diamètre en utilisant la méthode d'exhaustion. Il a obtenu une meilleure précision de la valeur de ce rapport en considérant des polygones réguliers inscrits et circonscrits à (3.2^{28}) côtés. Il a donné le résultat des calculs, qu'il a effectués, dans la base sexagésimale puis décimale comme suit :

$$2\pi = 6;16,59,28,1,34,51,46,14,50 \quad \text{et} \quad 2\pi = 6,2831853071795865^{153}.$$

Dans son *Zīj Khāqānī* [Les tables de Khāqān], il a décrit une méthode pour résoudre un problème astronomique sur les éphémérides planétaires. Dans ses calculs, il a utilisé des valeurs approchées et une méthode qu'il a nommée *qaws al-ikhtilāf* [l'arc de différence]¹⁵⁴.

A cela, nous ajoutons que dans un de ses ouvrages, al-Kāshī a déclaré avoir inventé une méthode particulière pour déterminer $\sin(1^\circ)$ avec une approximation très fine¹⁵⁵. L'épître qui contient ce calcul est intitulée *Risāla al-watar wa l-jayb* [Epître sur la corde et le sinus]. Son contenu nous est parvenu à travers un commentaire sur des tables astronomiques qui est

¹⁵³ - YOUSCHKEVITCH, A. P. & ROSENFELD, B. A. : Al-Kāshī. In Ch. Gillespie (éd.) : *Dictionary of Scientific Biography*, New York, Scribner's Sons, 1981, vol. 7, pp. 259-260.

¹⁵⁴ - E. S. Kennedy a présenté dans ses études sur les sciences exactes arabes les étapes les plus importantes des calculs effectués par al-Kāshī. Dans son étude, il a présenté ses commentaires et une traduction anglaise de quelques passages du texte d'al-Kāshī. KENNEDY, E. S. : *Studies in the Islamic Exact Sciences*, American University, op. cit., pp. 117-120

¹⁵⁵ - C'est ce qui est écrit dans une copie de *Miftāh al-ḥisāb* qui est conservée à British Musum. Sur cette information voir AL-KĀSHĪ : *Miftāh al-ḥisāb*, op. cit., p. 22.

intitulé *Dustūr al-aōmāl wa taṣhīh al-jadwal* [Les règles de l'opération et la correction de la table] écrit par Mīrām Shalabī (XV^e s.), le petit fils d'al-Kāshī¹⁵⁶.

La méthode d'al-Kāshī

Dans son épître, al-Kāshī a calculé $\sin 1^\circ$ avec 10 chiffres après la virgule, en l'exprimant dans la base sexagésimale. Abū l-Wafā et Ibn Yūnus (m. 1242) l'avaient fait avant lui mais avec seulement 4 chiffres après la virgule¹⁵⁷.

En astronomie, les techniques de calculs connues déjà dans la tradition grecque permettent d'obtenir avec précision $\text{cord}(12)^\circ$, $\text{cord}(6)^\circ$, $\text{cord}(3)^\circ$, $\text{cord}(1^\circ 30)$. Mais la méthode utilisée, qui est essentiellement basée sur un raisonnement géométrique¹⁵⁸, ne permet pas d'obtenir de meilleures approximations sexagésimales de $\text{cord}(1^\circ)$. Celle qui était connue est $\text{cord}(1^\circ) = 1;2,50$ ¹⁵⁹.

Al-Kāshī a exposé, dans son épître, un algorithme qui permet de calculer avec, une grande précision, $\text{Sin}(1^\circ)$ à partir de la valeur connue de $\text{Sin}(3^\circ)$ qui est $\text{Sin}(3^\circ) = 3;8,24,33,59,34,28,15$.

Pour expliciter ses calculs, nous posons le rayon égal à 60. Ainsi, la valeur de $\text{Sin } x$ coïncide avec celle de $\sin x$ dans la base sexagésimale¹⁶⁰.

Puis, en utilisant la relation trigonométrique $\sin(3^\circ) = 3\sin(1^\circ) - 4(\sin(1^\circ))^3$ et en posant $\text{Sin}(1^\circ) = x$, on aboutit à l'équation $\text{Sin}(3^\circ) = \frac{3}{60}x - 4\left(\frac{x}{60}\right)^3$.

Celle-ci est de la forme $px = q + x^3$ avec p et q strictement positifs.

Cette équation est celle qui exprime algébriquement le problème de la trisection de l'angle.

¹⁵⁶ - Pour plus de renseignement voir YOUSCHKEVITCH, A. P. & ROSENFELD, B. A. : Al-Kāshī. In Ch. Gillespie (éd.) : *Dictionary of Scientific Biography*, op. cit.

¹⁵⁷ - YOUSCHKEVITCH, A. P. & ROSENFELD, B. A. : Al-Kāshī. In Ch. Gillespie (éd.) : *Dictionary of Scientific Biography*, op. cit. p. 258.

¹⁵⁸ - Al-Bīrūnī a exposé dans son ouvrage *al-Qānūn al-masūūdī* les formules qui permettent de calculer la corde de la moitié d'un arc dont la corde est connue.

¹⁵⁹ - CHARBERT, J-L. & BARBIN, E. & GUILLEMOT, M. & PAJUS, A. M. & BOROWCZYK, J. & DJEBBAR, A. & MARTZLOFF, J-C. : *Histoire d'algorithmes, du caillou à la puce*, Edition Belin, Paris, 1994, p. 249-250. BERGGREN, J. L. : *Episodes in the mathematics of medieval Islam*, op. cit., p. 151.

¹⁶⁰ - KENNEDY, E. S. : *Studies in the Islamic Exact Sciences*, op. cit., p. 514.

Dans l'équation d'al-Kāshī, on a : $q = \left(\frac{\sin(3^\circ)}{4} \right) \cdot 60^2 = 47,6;8,29,53,37,3,45$ et

$$p = \left(\frac{3}{4} \right) \cdot 60^2 = 45,0;$$

Le procédé itératif qu'al-Kāshī a décrit consiste à calculer la solution par tranche c'est-à-dire chiffre par chiffre en l'écrivant ainsi : $x = a_1 + a_2 + \dots + a_{10} + \dots$.

Il a déterminé la valeur de a_1 puis celle de a_2 et ainsi de suite. Il s'est arrêté à a_{10} mais le procédé peut se poursuivre.

L'interprétation qu'on peut donner aux calculs qu'il a effectués est basée sur l'idée suivante :

$$\text{Comme } px = q + x^3 \text{ alors } x = \frac{q + x^3}{p} = \frac{q}{p} + \frac{x^3}{p}$$

Ainsi, la première valeur approchée de x est déterminée à partir de la quantité connue du rapport $\frac{q + x^3}{p}$. On la pose $x_1 = \frac{q}{p}$.

$$\text{D'où } a_1 = x_1 = \frac{47,6;8,29,53,37,3,45}{45,0} \approx 1$$

La solution s'écrit alors $x = a_1 + b$ et vérifie :

$$a_1 + b = \frac{q + (a_1 + b)^3}{p} = \frac{q + a_1^3}{p} + \frac{3a_1^2b + 3a_1b^2 + b^3}{p}$$

Comme pour le cas précédent, c'est la partie connue du nouveau rapport $\frac{q + a_1^3}{p}$ qui déterminera la valeur de la deuxième tranche a_2 . Ainsi la deuxième valeur approchée s'écrit

$$x_2 = a_1 + a_2 \text{ et vérifie } a_1 + a_2 = \frac{q + a_1^3}{p}.$$

$$\text{D'où } a_2 = \frac{q + a_1^3 - pa_1}{p} \text{ c'est-à-dire :}$$

$$a_2 = \frac{1 + 47,6;8,29,53,37,3,45 - 45,0}{45,0} \approx \frac{2}{60}$$

La deuxième valeur approchée est $x_2 = 1;2$.

La solution s'écrit alors $x = (a_1 + a_2) + b$ et vérifie :

$$(a_1 + a_2) + b = \frac{q + ((a_1 + a_2) + b)^3}{p} = \frac{q + (a_1 + a_2)^3}{p} + \frac{3(a_1 + a_2)^2 b + 3(a_1 + a_2)b^2 + b^3}{p}.$$

De la même manière la partie $\frac{q + (a_1 + a_2)^3}{p}$ déterminera la valeur de la troisième tranche a_3 . Et la troisième valeur approchée s'écrira $x_3 = (a_1 + a_2) + a_3$ et vérifie

$$(a_1 + a_2) + a_3 = \frac{q + (a_1 + a_2)^3}{p}.$$

D'où $a_3 = \frac{q + (a_1 + a_2)^3 - p(a_1 + a_2)}{p}$ c'est-à-dire :

$$a_3 = \frac{1,6,12,8 + 47,6; 8,29,53,37,3,45 - 46,30;}{45,0;} \approx \frac{49}{60^2}$$

La troisième valeur approchée est $x_3 = 1;2,49$

Et ainsi de suite on continue à déterminer les tranches qui restent de la manière suivante :

$$a_i = \frac{(q + x_{i-1}^3 - px_{i-1})}{p} \text{ avec } x_{i-1} = a_1 + a_2 + \dots + a_{i-1}$$

Ainsi, la méthode d'al-Kāshī consiste à calculer le dixième terme de la suite récurrente suivante :

$$\begin{cases} x_1 = \frac{q}{p} \\ x_n = \frac{q + x_{n-1}^3}{p} \end{cases}$$

Ce procédé converge car en posant $f(x) = \frac{q + x^3}{p}$, la condition du théorème du point fixe est satisfaite.

$$\text{En effet, } 0 < \frac{3x^2}{p} < 1 \text{ et } |f(x) - f(x')| = \left| \frac{x^3 - x'^3}{p} \right| = \frac{(x^2 + xx' + x'^2)}{p} |x - x'| < \frac{3x^2}{p} |x - x'|$$

puisque $1 < x' < x < 2; .$

II
LES PROCÉDES D'APPROXIMATION DANS
LES OUVRAGES MATHÉMATIQUES
DE L'OCCIDENT MUSULMAN

II.1- INTRODUCTION

Les études récentes, qui ont été réalisées autour de la production mathématique dans l'Occident musulman, dans le but d'approfondir les connaissances sur certains aspects du développement des activités mathématiques dans cette région, ont parfois écarté des réflexions qui avaient été émises par défauts d'informations et insuffisances de documents. Elles ont aussi apporté des réponses à des interrogations exprimées à propos de l'algèbre et du symbolisme. Dans le domaine du calcul, elles ont signalé la présence d'un calcul par approximation dans certains ouvrages, qui ont été récemment retrouvés.

Notre étude renferme toutes les informations sur les approximations, contenues dans les ouvrages qu'il nous a été possible de consulter et qui ont été rédigés durant la période allant du X^e siècle au XIX^e siècle. Elle comprend aussi des analyses, des commentaires et parfois des tests pour évaluer l'efficacité des procédés.

Avant d'exposer les résultats de cette étude, nous allons évoquer quelques éléments qui pourraient révéler la présence d'un calcul par approximation dans des travaux d'algèbre et de géométrie. Dans l'état actuel de nos connaissances, ce sont précisément les ouvrages rédigés au XIV^e siècle qui contiennent certaines informations sur ce volet de l'activité mathématique dans l'Occident musulman. Mais elles sont insuffisantes pour faire une description de son développement dans les deux domaines cités.

En algèbre et plus particulièrement à propos de la résolution des équations de degré supérieur ou égal à trois¹⁶¹, Ibn Khaldūn n'a pas signalé la présence d'une telle étude dans les travaux des mathématiciens de l'Occident musulman. Par contre, il a affirmé que le nombre d'équations étudiées en Orient aurait dépassé 20¹⁶². En outre, d'après plusieurs études récentes, aucun mathématicien connu du XII^e au XIV^e siècle, auteurs des livres d'enseignement qui nous sont parvenus, n'a fait allusion à la théorie géométrique des équations cubiques ni à la résolution numérique des équations de degré quelconque¹⁶³.

Mais, cela ne signifie pas que la résolution de quelques types d'équations de degré supérieur ou égal à deux n'ait pas préoccupé les mathématiciens de l'Occident musulman. En effet, Ibn

¹⁶¹- L'étude des équations de degré inférieur ou égal à deux, quadratiques et biquadratique est connue par les mathématiciens de l'Occident musulman. Nous la retrouvons dans plusieurs ouvrages publiés à des périodes différentes. Voir DJEBBAR, A. : *Mathématiques et mathématiciens dans le Maghreb médiéval (IXe - XVIe siècles)*, Contribution à l'étude des activités scientifiques de l'Occident musulman, Thèse de Doctorat, Paris, Université de Nantes- Université de Paris-Sud, 1990, 850 pp.

¹⁶²- IBN KHALDŪN. : *Al-Muqaddima* [Les Prolégomènes], Beyrouth, Dār ihyā' at-turāth al-ōarabī, 1999, tome 2, p. 484.

¹⁶³- Il y a toutefois des témoignages qui certifient qu'Ibn Sayyid a étudié le problème de la trisection de l'angle : Voir DJEBBAR, A. : *Mathématiques et mathématiciens dans le Maghreb médiéval (IXe - XVIe siècles)*, op. cit., tome I, pp. 335-350

al-Bannā (m. 1321) a résolu l'équation $x^4 + 2x^3 = x + 30$, dans son *Kitāb al-uṣūl wa l-muqaddimāt fī l-jabr wa l-muqābala* [Le livre des fondements et de préliminaires en algèbre et en muqābala], à l'aide d'un procédé particulier qui utilise un changement de variable¹⁶⁴. Dans le *Rafʿ al-ḥijāb*, il a exposé, d'une manière brève, la résolution par approximation de l'équation cubique : $x^3 = A$.

Au XIV^e siècle, Ibn al-Hā'im a signalé qu'un mathématicien andalou du nom d'Ibn al-Faḥḥām¹⁶⁵ avait résolu l'équation cubique $x^3 + 12 = 10x$ qui découle du problème qui est posé ainsi : Trouver deux nombres X, Y positifs tels que $X + Y = 10$, $Y \cdot \sqrt{X} = 12$ ¹⁶⁶.

Ce témoignage ne donne aucune information sur la contribution d'Ibn al-Faḥḥām dans la résolution de ce type d'équation. D'autre part il n'apporte aucun renseignement à propos de l'étude des équations cubiques qui n'admettent pas de solution particulière qu'elle soit entière comme dans ce cas précis ou irrationnelle¹⁶⁷. Le silence, qui règne autour des tentatives de résolution des équations cubiques par les mathématiciens de l'Occident musulman, laisse supposer que les travaux de ces derniers n'ont pas été concluants.

Dans le domaine de la géométrie, plusieurs ouvrages ont été publiés dont certains nous sont parvenus. Les études et les analyses, qui ont été réalisées jusqu'à présent, nous permettent de dégager quelques éléments révélateurs de la présence d'un calcul par approximation dans ce domaine.

Le premier est constaté au X^e siècle dans le traité d'Ibn ʿAbdūn (923-après 970) sur la géométrie du mesurage intitulé *Risāla fī t-taksīr* [Epître sur le mesurage]. L'analyse de l'épître a montré que pour calculer la racine carrée des nombres non carrés parfaits, l'auteur a utilisé deux procédés d'approximation¹⁶⁸ qui étaient connus, dans la même période, en Orient musulman.

¹⁶⁴- DJEBBAR, A. : *Mathématiques et mathématiciens dans le Maghreb médiéval (IXe - XVIe siècles)*, op. cit., tome II, p. 42.

¹⁶⁵- Abū l-Ḥasan ʿAlī Ibn al-Faḥḥām est un mathématicien qui vivait à Tlemcen à l'époque d'Ibn al-Hā'im. Voir DJEBBAR, A. : *Mathématiques et mathématiciens dans le Maghreb médiéval (IXe - XVIe siècles)*, op. cit., p. 87, note 87.

¹⁶⁶- ABDELJAOUAD, M. : *Ibn al-Hā'im, Sharḥ al-urjūza al-yāsmīniyya* [Commentaire sur le poème d'Ibn al-Yāsamīn], Publication de l'Association Tunisienne des Sciences Mathématiques, 2003, p. 132.

¹⁶⁷- Pour cette équation, la solution particulière vaut 2.

¹⁶⁸- DJEBBAR, A. : *Ar-Risāla fī t-taksīr li Ibn ʿAbdūn, shāhid ʿalā al-mumārasāt as-sābiqa li t-taqlīd al-jabrī al-ʿarabī* [L'épître sur le mesurage d'Ibn ʿAbdūn, un témoin des pratiques antérieures à la tradition algébrique arabe], *Suhayl, Journal for the History of the Exact and Natural Sciences in Islamic Civilisation*, Barcelone, 2005, vol. 5, partie arabe, pp. 7-68.

Au Maghreb, Ibn Haydūr (m. 1413) est le plus ancien mathématicien connu qui évoque des calculs approchés dans la résolution de problèmes géométriques¹⁶⁹.

Les références, qu'il a signalées, aux écrits orientaux et occidentaux comme l'épître sur l'heptagone d'aṣ-Ṣāghānī (X^e s.), *Risāla fī majhūlāt qisiyy al-kura* [Epître sur les arcs inconnus de la sphère] d'Ibn Mu'ādh al-Jiyyānī (XI^e s.) et *al-Mudkhal al-ōilmī* [L'introduction théorique] d'Ibn as-Samḥ (XI^e s.) témoignent de l'influence de la tradition mathématique andalouse sur la production mathématique du Maghreb. Elles permettent aussi de constater la circulation de quelques travaux orientaux sur le calcul par approximation, rattaché à des problèmes de géométrie. Celui, qu'il a présenté dans son commentaire au *Talkhīs*, intitulé *Tuḥfat aṭ-Ṭullāb* [La parure des étudiants], consiste à calculer par approximation la longueur du côté d'un polygone régulier à n côtés inscrit dans un cercle. Il a exposé les procédés de ce calcul approché dans le dernier chapitre, qu'il a intitulé *Extraction du côté d'une figure (inscrite) dans un cercle*¹⁷⁰.

Dans le domaine du calcul plusieurs ouvrages, qui renferment des procédés d'approximation, sont connus de nos jours. L'analyse de leurs contenus propose un ensemble de formules, de preuves et d'outils qui représentent, dans l'état actuel de nos connaissances, des éléments importants et caractéristiques du calcul approché dans la tradition de l'Occident musulman.

Les ouvrages que nous avons utilisés dans notre étude sont essentiellement les suivants : le *Kitāb al-bayān wa t-tadkhār* [Le livre de la démonstration et du rappel] et le premier volume du *Kāmil fī ṣinā'at al-ōadad* [(Livre) complet sur l'art du nombre], tous les deux d'al-Ḥaṣṣār (XII^e s.) ; le *Talqīh al-afkār fī l-ōamal bi rushūm al-ghubār* [La greffe des esprits sur

¹⁶⁹- DJEBBAR, A. : *Contribution à l'étude des activités mathématiques dans l'Occident musulman (IX^e-XVI^e siècles)*, Paris, Ecole des Hautes Etudes en Sciences Sociales, 1998, 639 pp.

¹⁷⁰- DJEBBAR, A. : *Habilitation à diriger des recherches, contribution à l'étude des activités mathématiques dans l'Occident Musulman (IX^e- XVI^e S)*, II articles, 1998, Ecole des Hautes Etudes en Sciences Sociales, p. 23, 37. MOSLIH, A. : *Tuḥfat aṭ-ṭullāb wa umniyyat al-ḥussāb fī sharḥ mā ashkala min Raf' al-ḥijāb li Ibn Haydūr at-Tādilī* [La parure des étudiants et le souhait des calculateurs sur l'explication des difficultés du Raf' al-ḥijāb d'Ibn Haydūr at-Tādilī], op. cit., pp. 783-800. DJEBBAR, A. : *Pratiques géométriques et géométrie savante au Maghreb : L'exemple d'Ibn Haydūr*, *Actes du 9^e Colloque maghrébin sur l'histoire des mathématiques arabes* (Tipaza, 12-14 mai 2007), Alger, Imprimerie Fasciné, 2011, pp. 53-79. MOSLIH, A. : *Taqdīm kitāb Tuḥfat aṭ-ṭullāb wa umniyyat al-ḥussāb fī sharḥ mā ashkala min Raf' al-ḥijāb li Ibn Haydūr at-Tādilī* [Présentation du livre « La parure des étudiants et le souhait des calculateurs sur l'explication des difficultés du 'Lever du voile' d'Ibn Haydūr at-Tādilī], *Actes du 9^e Colloque maghrébin sur l'histoire des mathématiques arabes* (Tipaza, 12-14 mai 2007), Alger, Imprimerie Fasciné, 2011, partie arabe, pp. 61-62.

l'utilisation des chiffres de poussière], d'Ibn al-Yāsamīn (m. 1204), le *Fiqh al-ḥiṣāb* [La science du calcul] d'Ibn Munōim (m. 1228) et les deux ouvrages d'Ibn al-Bannā (m. 1321) intitulés *Talkhīṣ aḥmāl al-ḥiṣāb* [L'abrégé des opérations du calcul] et *Rafʿ al-ḥijāb ʿan wujūh aḥmāl al-ḥiṣāb* [Le soulèvement du voile sur les formes des procédés du calcul]. A ces ouvrages, il faut ajouter certains commentaires du *Talkhīṣ*.

Nous avons également étudié d'autres textes extraits d'ouvrages qui sont rédigés à des périodes différentes comme le *Rashf ar-ruḍāb min thughūr aḥmāl al-ḥiṣāb* [Succion du nectar des bouches des opérations du calcul] d'al-Qaṭrawānī (XIV^e s.) et le *Ghunyat dhawī l-albāb* [La richesse des gens intelligents] d'al-Qalaṣādī (m. 1486). Ainsi que le commentaire de Muḥammad Ṭfayyash (XIX^e s.) sur le *Kashf al-ʿasrār ʿan ʿilm ḥurūf al-ghubār* [Révélation des secrets relatifs à la science des chiffres de poussière] d'al-Qalaṣādī.

Nous signalons que plusieurs ouvrages sont attribués à al-Qalaṣādī, mais ceux que nous avons pu consulter renferment tous la même étude sur le calcul par approximation. Nous présenterons dans ce travail la version exposée dans *Ghunyat dhawī l-albāb*.

Dans la majorité de ces ouvrages, l'étude de l'irrationalité du nombre $\sqrt{10}$ et de celle du nombre $\sqrt[3]{10}$ servaient d'introduction au chapitre sur le calcul approché. Il est intéressant de constater que le choix de ces deux nombres assure l'irrationalité de la position des dizaines dans le cas de la racine carrée et de la racine cubique. Cette position reste encore irrationnelle dans le cas de la racine nième (n quelconque).

Et de la même manière, nous pouvons vérifier que les positions qui suivent celle des dizaines sont au moins une fois rationnelles pour chaque valeur de n , $n \geq 2$:

Par exemple la position des centaines est rationnelle dans le cas de la racine carrée c'est-à-dire pour $n=2$.

La position des milles l'est pour la racine cubique c'est-à-dire $n=3$. Et ainsi de suite.

La notion de position, que nous évoquons ici, intervient d'une manière indirecte dans le calcul approché de la racine carrée ou cubique d'un nombre. Le résultat fourni par l'algorithme d'extraction de la racine carrée ou celui de la racine cubique est celui qui déterminera la valeur approchée qui sera attribuée au nombre dont on cherche la racine. Ainsi la nature de chaque position de ce nombre est importante pour ce calcul¹⁷¹.

¹⁷¹ - Cette nature intervient aussi pour le calcul de la racine $n^{\text{ième}}$.

Comme celle des dizaines, nous pouvons distinguer les positions sourdes ou irrationnelles de la manière suivante : $\sqrt[n]{10}$ est irrationnel pour $n \geq 2$. C'est le résultat énoncé plus haut.

$\sqrt[n]{100}$ est irrationnel pour $n \geq 3$ et ainsi de suite :

$\sqrt[n]{10^p}$ est irrationnel pour $n \geq p + 1$ et $p \geq 3$

Et $\sqrt[n]{10^{p+n}}$ est irrationnel pour $n \geq p + 1$ et $p \geq 1$

Des critères aussi ont été exposés dans les ouvrages de l'Occident musulman pour assurer l'irrationalité du nombre \sqrt{A} , A étant un entier non carré¹⁷².

Si nous adoptons l'écriture du nombre A dans le système décimale comme suit $A = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}$, nous présentons ces critères ainsi :

1- Si $a_0 \neq 1$ et $a_0 \neq 4$ et $a_0 \neq 5$ et $a_0 \neq 6$ et $a_0 \neq 9$ alors le nombre \sqrt{A} est irrationnel¹⁷³.

La preuve de cela est due au fait que pour tout nombre $0 \leq a \leq 9$, nous avons :

$$\begin{cases} (a)^2 = \overline{b_0} & \text{avec } 1 \leq a \leq 3 \\ (a)^2 = \overline{b_1 b_0} & \text{avec } 4 \leq a \leq 9 \end{cases}$$

Dans ce cas nous aurons toujours $b_0 = 1$ ou bien $b_0 = 4$ ou bien $b_0 = 9$ pour les premières valeurs de a .

$b_0 = 1$ ou bien $b_0 = 4$ ou bien $b_0 = 5$ ou bien $b_0 = 6$ ou bien $b_0 = 9$ pour les secondes.

Le cas $a_0 = 0$ a été étudié à part.

2- Le deuxième cas consiste à examiner les chiffres qui occupent les deux premières positions :

Si $a_0 = 6$ et a_1 est pair alors \sqrt{A} est irrationnel

Si $a_0 \neq 6$ et a_1 est impair alors \sqrt{A} est irrationnel

¹⁷²- Certains mathématiciens du XIV^e siècle ont exposé ces critères comme al-Ghurbī et Ibn Haydūr. Voir Al-Ghurbī, *Takhṣīṣ uwlī l-albāb fī sharḥ talkhīṣ aḥmāl al-ḥisāb* [Spécialisation des hommes de cœur dans le commentaire de l'abrégé des opérations du calcul], Ms. Alger, B.N, n° 2712, ff. 95b-98b. MOSLIH, A. : *Tuḥfat at-tullāb wa umniyat al-ḥussāb fī sharḥ mā ashkala min Rafō al-ḥijāb li Ibn Haydūr at-Tādīlī* [La parure des étudiants et le souhait des calculateurs sur l'explication des difficultés du Rafō al-ḥijāb d'Ibn Haydūr at-Tādīlī], op. cit., pp. 669-670.

¹⁷³- Les nombres 2, 3, 7 et 8 ont été exprimés soit par les chiffres ghubār soit par la numération alphabétique.

Si $a_0=5$ et $a_1 \neq 2$ alors \sqrt{A} est irrationnel

Si $a_0=1$ et les nombres $\frac{1}{2}(a_1.10)$ et a_2 sont de parité différente alors \sqrt{A} est irrationnel

3- L'utilisation des soustractions successives :

Si $A \equiv a[9]$ avec $a \neq 0$ et $a \neq 1$ et $a \neq 4$ et $a \neq 7$ alors \sqrt{A} est irrationnel

Si $A \equiv a[8]$ avec $a \neq 0$ et $a \neq 1$ et $a \neq 4$ alors \sqrt{A} est irrationnel

Si $A \equiv a[7]$ avec $a \neq 0$ et $a \neq 1$ et $a \neq 2$ et $a \neq 4$ alors \sqrt{A} est irrationnel

Dans certains ouvrages, des méthodes, qui sont généralement basées sur l'identité $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$, ont été exposées pour construire des nombres carrés.

Nous signalons, aussi, que le calcul approché de la racine carrée et de la racine cubique a été étendu à l'ensemble des nombres rationnels strictement positifs. Des formules ont été développées pour attribuer des valeurs exactes ou approchées aux nombres $\sqrt{\frac{a}{b}}$, $\sqrt[3]{\frac{a}{b}}$ selon la nature des entiers a et b .

La tradition de l'Occident musulman sur le calcul approché de la racine carrée et de la racine cubique d'un nombre entier ou fractionnaire comprend des algorithmes d'extraction des racines et des procédés d'approximation suivis, parfois, de preuves.

Dans la majorité des ouvrages rédigés à partir du XIV^e siècle, l'étude des procédés d'approximation a été présentée dans le chapitre consacré aux nombres radicaux. Cette étude présentent des formules d'approximation accompagnées d'un certain nombre d'exemples choisis dans le but de tester l'efficacité des procédés et d'évaluer leur précision. Certains auteurs ont développé l'étude de la racine cubique d'une manière analogue à celle de la racine carrée et dans le même chapitre. C'est le cas d'Ibn Zakariyyā et d'al-Qaṭrawānī.

Avant eux, Ibn al-Bannā n'a pas décrit l'algorithme de la racine cubique qu'il a jugé long et de peu d'utilité. Mais, il a présenté un procédé d'approximation de la racine cubique dans le premier chapitre du *Raf' al-ḥijāb*, qui est consacré aux nombres entiers.

Nous nous proposons, dans cette étude, de faire une présentation de toutes les formules d'approximation que nous avons repérées dans les écrits que nous avons cités.

Notre préoccupation tout au long de cet exposé sera de révéler la nature des objets et des outils de calcul et d'algèbre, qui ont pu être utilisés dans l'enseignement de ces procédés.

D'abord, nous rappelons que dans les ouvrages de calcul, que nous avons consultés, les formules d'approximation de la racine carrée (respectivement de la racine cubique) ont été énoncées après l'algorithme de l'extraction de la racine carrée d'un nombre carré parfait (respectivement de la racine cubique d'un nombre cube parfait). Cet ordre n'a, cependant, pas été respecté dans deux ouvrages : le premier est *Talqīh al-afkār fī l-ʿamal bi rushūm al-ghubār* d'Ibn al-Yāsamīn (m.1204) dans lequel l'auteur a exposé l'algorithme de la racine cubique sans aborder le calcul approché¹⁷⁴. Le deuxième est *Rafʿ al-ḥijāb* d'Ibn al-Bannā (m.1321) dans lequel ont été exposés des formules d'approximation de la racine cubique d'un nombre A qui n'est pas un cube parfait sans le calcul de sa racine exacte¹⁷⁵.

Les deux algorithmes d'extraction de la racine carrée et de la racine cubique sont basés sur l'écriture des nombres dans le système décimal positionnel et sur les identités remarquables suivantes:

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2.ab \quad \text{et} \quad (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Concernant la racine carrée, on se servait du développement décimal d'un nombre A qui

est $A = (x_0 + x_1 + \dots + x_n) = \sum_{i=0}^n a_i 10^i$ c'est à dire avec $x_i = a_i \cdot 10^i$ et de l'expression

$$\begin{aligned} (x_0 + x_1 + \dots + x_n)^2 &= (a_0 + a_1 \cdot 10 + \dots + a_n \cdot 10^n)^2 \\ &= a_0^2 + (2 \cdot a_0 a_1 + a_1^2) 10 + (2 \cdot a_0 a_2 + 2 a_1 a_2 + a_2^2) 10^2 + \dots + (2 a_0 a_n + 2 a_1 a_n + \dots + 2 a_{n-1} a_n + a_n^2) 10^n \end{aligned}$$

Quant à l'algorithme d'extraction de la racine cubique, il utilise la formule déjà citée c'est-à-dire $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ à chaque étape du calcul en procédant par la méthode d'effacement de telle manière qu'il ne sera présenté vers la fin de l'opération que le résultat final et le reste quant celui-ci n'est pas nul. Nous exposerons les étapes les plus importantes de ces deux algorithmes et essayerons d'établir le lien qui lie chacun de ces algorithmes à l'opération arithmétique élémentaire qui est la multiplication.

¹⁷⁴- ZEMOULI, T. : *Al-Aʿmāl ar-riyyādīyya li Ibn al-Yāsamīn (m.1204)* [L'œuvre mathématique d'Ibn al-Yāsamīn], op. cit., pp. 264-266.

¹⁷⁵- ABALLAGH, M. : *Rafʿ al-ḥijāb d'Ibn al-Bannā*, Edition critique, traduction française et analyse mathématique, Thèse de Doctorat, Paris, Université de Paris I- Panthéon- Sorbonne, 1988. p. 296.

II-2. Les procédés d'approximation dans *Fiqh al-ḥisāb* d'Ibn Munōim et *Kitāb al-bayān wa t-tadhkār* d'al-Ḥaṣṣār

L'ouvrage d'Ibn Munōim intitulé *Fiqh al-ḥisāb* est le plus ancien écrit, que nous possédons actuellement, qui renferme des formules d'approximation accompagnées de justifications. L'auteur a utilisé à la fois des outils arithmétiques et algébriques pour expliciter les différentes étapes du calcul approché. Les procédés d'approximation qu'il a énoncés et surtout ceux de la racine cubique sont très différents de ceux qui ont été proposés dans les écrits de l'Orient musulman.

Le *Kitāb al-bayān wa t-tadhkār* d'al-Ḥaṣṣār contient les mêmes procédés d'approximations de la racine carrée qui sont exposés dans *Fiqh al-ḥisāb*. Leur présentation dans cet ouvrage est particulière ainsi que la description de chacune de leurs étapes. Al-Ḥaṣṣār n'a pas donné une justification des algorithmes mais il a proposé un certain nombre d'exemples probablement pour affirmer leur validité. Il a aussi utilisé l'idée de minimiser l'erreur commise par ces procédés en adoptant d'une manière explicite le calcul par itération qui n'a pas été énoncé de la même façon par Ibn Munōim.

Dans cette section, nous allons exposer les différents procédés d'approximations que nous avons repérés dans les deux écrits que nous venons de citer. Nous présenterons les justifications d'Ibn Munōim et nous indiquerons les notions et la terminologie qu'il a utilisées.

II-2.1. Les procédés d'approximation de la racine carrée d'un nombre entier

II-2.1.a. Préliminaires

1- Tout nombre entier A , qui n'est pas un carré parfait, est encadré par deux nombres carrés consécutifs : c'est-à-dire qu'il existe un nombre entier n tel que $n^2 \leq A < (n+1)^2$.

Le calcul de n se fait en appliquant l'algorithme de l'extraction de la racine carrée d'un nombre carré parfait qui est essentiellement basé sur la multiplication par semi-translation. La représentation qui a été attribuée à ce type de multiplication explique parfaitement celle qui a été utilisée pour l'extraction de la racine carrée¹⁷⁶. Nous allons donner les étapes les plus importantes de ce calcul à travers des exemples.

¹⁷⁶ - Il ya plusieurs types de multiplication : celui qui est utilisé pour le calcul du carré d'un nombre est appelé multiplication par semi-translation « *ḍarb bi niṣf tanqīl* ». Al-Ūqbānī a fait une description de cette

2- La multiplication par semi-translation

Soit N le nombre dont on veut calculer le carré. Pour mieux illustrer les étapes de l'opération, nous le choisissons composé d'unités, de dizaines et de centaines : c'est-à-dire que $d(N) = 3$ ¹⁷⁷.

Posons $N = \overline{abc} = c + 10b + 100a$

Pour calculer N^2 nous adoptons la représentation suivante $a \cdot b \cdot c$ ¹⁷⁸.

Les cinq positions, dont deux sont occupées par les trois points et les trois autres par les chiffres a , b et c , représentent les positions du nombre N^2 . Effectivement, en appliquant la règle des degrés qui a été énoncée par al- δ Uqbānī, à la suite d'Ibn Munōim¹⁷⁹, nous avons

$$d(N^2) = 2.3 - 1 = 5$$

Nous avons aussi :

$$N^2 = (100a + (10b + c))^2 = 10000a^2 + 1000((2a)b) + 100b^2 + 100((2a)c) + 10(2b)c + c^2$$

Ce schéma fait apparaître les opérations élémentaires suivantes : les carrés a^2, b^2, c^2 et les doubles produits $(2a)$ et $(2b)$. Les résultats de ces opérations sont indiqués dans la représentation de l'algorithme, mais la décroissance des puissances de 10 est interprétée par la translation des positions occupées par les doubles produits¹⁸⁰. Voici la représentation de l'algorithme :

$$a \cdot b \cdot c \quad \mapsto \quad \begin{array}{c} a^2 \\ a \cdot b \cdot c \\ 2a \end{array} \quad \mapsto \quad \begin{array}{ccc} a^2 & 2ab & b^2 \\ a & \cdot & b \cdot c \\ & 2a & \end{array}$$

↵

opération et l'a utilisée dans sa description de l'algorithme d'extraction de la racine carrée. Son exposé se base sur les indications d'Ibn Munōim à propos de ces deux opérations. Voir LAMRABET, D. : *Fiqh al-ḥisāb* [La science du calcul], Rabat, Dār al-amān, 2005. p. 66. HARBILI, A. : *L'enseignement des mathématiques à Tlemcen au XIVe siècle à travers le commentaire d'al- δ Uqbānī(m.1408) au Talkhīṣ d'Ibn al-Bannā (m.1321)*, Magister d'Histoire des Mathématiques, E. N. S. d'Alger, 1997. pp. 69-70.

¹⁷⁷- $d(N)$ est le nombre de positions qui définissent N . Il est appelé degré de N . Pour plus de détails sur cette notion voir HARBILI, A. : *L'enseignement des mathématiques à Tlemcen au XIVe siècle à travers le commentaire d'al- δ Uqbānī (m.1408) au Talkhīṣ d'Ibn al-Bannā (m.1321)*, op. cit., pp. 63-67.

¹⁷⁸- Cette représentation a été exposée par les mathématiciens maghrébins du XIV^e siècle.

¹⁷⁹- LAMRABET, D. : *Fiqh al-ḥisāb* [La science du calcul], op. cit., p. 66. HARBILI, A. : *L'enseignement des mathématiques à Tlemcen à travers le commentaire d'al- δ Uqbānī*, op. cit., p. 251.

¹⁸⁰- Pour justifier ces calculs, al- δ Uqbānī a utilisé la proposition 4 du deuxième livre des *Eléments* d'Euclide. Voir HARBILI, A. : *L'enseignement des mathématiques à Tlemcen au XIVe siècle à travers le commentaire d'al- δ Uqbānī (m.1408) au Talkhīṣ d'Ibn al-Bannā (m.1321)*, op. cit., pp. 253-255.

$$\begin{array}{ccccccc}
 a^2 & 2ab & b^2 & & a^2 & 2ab & b^2 + 2ac & 2bc \\
 a & \therefore & b & \therefore & a & \therefore & b & \therefore & c \\
 & & 2a & 2b & & & 2a & 2b &
 \end{array}
 \mapsto$$

⌋

$$\mapsto \begin{array}{cccccc}
 a^2 & 2ab & b^2 + 2ac & 2bc & c^2 \\
 a & \therefore & b & \therefore & c \\
 & & 2a & 2b &
 \end{array}$$

$$N^2 = \overline{(a^2)(2ab)(b^2 + 2ac)(2bc)(c^2)}$$

Exemple

$$N=123 \quad \mapsto \quad N^2 = \overline{1^2 (2.1.2) (2^2 + 2.1.3) (2.2.3) 3^2} = 15129$$

3- L'extraction de la racine carrée d'un nombre carré parfait

Extraire la racine carrée d'un nombre carré parfait N revient à déterminer la valeur du nombre entier n qui vérifie $N = n^2$

Or, en appliquant la règle des degrés nous avons $d(N) = 2d(n) - 1$

Comme $d(n)$ est un entier nous posons $d(n) = \left[\frac{d(N)+1}{2} \right]$ qui désigne la partie entière

de la fraction $\frac{d(N)+1}{2}$.

L'algorithme qui a été élaboré pour expliciter les étapes de cette opération est basé sur l'algorithme de la multiplication par semi-translation du nombre inconnu n par lui-même. Ainsi les positions impaires du nombre N sont les positions du nombre n qui est inconnu. Quant aux positions paires elles désignent les positions occupées par les doubles produits dans le calcul de n^2 . En Orient, as-Samaw'al (m. 1175) a nommé les positions impaires *al-muôtiya*¹⁸¹. Mais, en Occident musulman, nous n'avons pas trouvé de terminologie propre à ces positions mis à part l'expression qui est répétée dans tous les écrits que nous avons consultés, même dans ceux de l'Orient qui est la suivante « racine, non racine, racine, non

¹⁸¹- RASHED, R. : *Entre arithmétique et algèbre. Recherches sur l'histoire des mathématiques arabes*, op. cit., p. 101.

racine,...etc. ». Cette expression indique clairement le sens que nous avons évoqué c'est-à-dire « position qui donne la racine, position qui ne donne pas la racine, ... ».

Soit N le nombre dont on veut calculer la racine avec $d(N)=3$. Il s'écrira alors $N = \overline{abc} = c + 10b + 100a$

Pour calculer \sqrt{N} nous adoptons la représentation suivante $\overset{a}{\quad} \overset{b}{\quad} \overset{c}{\quad}$ dans laquelle les positions impaires sont indiquées par un point placé en-dessus des chiffres qui les occupent.

Comme $d(\sqrt{N})=2$ on écrit alors $\sqrt{N} = \overline{uv} = 10u + v$

Puis, nous procédons par étapes en appliquant le schéma suivant qui est basé sur la comparaison des deux nombres N et $(\sqrt{N})^2$:

$$(10u + v)^2 = 100u^2 + 10((2u)v) + v^2 = 100a + 10b + c$$

La première étape :

Elle consiste à déterminer le plus grand entier u , compris entre 0 et 9, qui vérifie $u^2 \leq a$.

On calcule la différence $(a - u^2)$ et on remplace le chiffre a par le résultat de cette opération.

Ensuite, on calcule le double produit $(2u)$ qu'on place en dessous du chiffre b .

La deuxième étape

Elle consiste à déterminer le plus grand entier v , compris entre 0 et 9, qui vérifie

$$10((2v)u) + v^2 \leq \overline{(a - u^2)bc}$$

Comme N est un carré alors $10((2v)u) + v^2 = \overline{(a - u^2)bc}$

D'où la représentation suivante :

$$\overset{a}{\quad} \overset{b}{\quad} \overset{c}{\quad} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{ccc} a - u^2 & b & c \\ & 2u & \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{ccc} a - u^2 & b & c \\ & 2u & v \end{array}$$

Puis, on détermine les résultats des calculs intermédiaires dans l'ordre suivant :

$$\overline{(a - u^2)b} - 2u.v = d$$

$$\overline{dc} - v^2 = 0 \quad \text{puisque } N \text{ est un carré parfait.}$$

Si le nombre de position est supérieur à 3 alors on continue l'algorithme de la même manière à partir de la représentation suivante :

$$\begin{array}{ccccccc} \overline{dc} - v^2 & e & f & g & \dots & \text{etc} \\ 2u & 2v & w & & & \end{array}$$

II-2.1.b. Les formules d'approximation

Soit A le nombre dont on cherche la racine. On suppose qu'il n'est pas un carré parfait et on pose n le plus grand carré, qui lui est inférieur et qui est obtenu par l'algorithme de l'extraction de la racine carrée. On écrit alors $A = n^2 + r$.

Formule 1

Premier cas

$$\text{Si } (A - n^2) < ((n+1)^2 - A) \text{ alors } \sqrt{A} = \sqrt{n^2 + r} \approx n + \frac{A - n^2}{2n}$$

Deuxième cas

$$\text{Si } (A - n^2) > ((n+1)^2 - A) \text{ alors } \sqrt{A} = \sqrt{n^2 + r} \approx (n+1) - \frac{(n+1)^2 - A}{2(n+1)}$$

Nous retrouvons également ces expressions chez Ibn al-Yāsamin (m. 1204) qui a formulé les deux conditions en termes de « *suivant que le nombre dont on veut calculer la racine est plus proche du plus petit carré ou du plus grand* »¹⁸².

Justification du procédé

Ibn Mun'im n'a pas présenté d'arguments qui permettent d'attribuer cette valeur au nombre irrationnel \sqrt{A} . Toute fois, il a donné une évaluation de l'erreur commise par ce calcul. En considérant $\sqrt{A} = \sqrt{n^2 + r} \approx n + \frac{A - n^2}{2n}$, il a montré que l'erreur commise est par

excès et est égale à $\left(\frac{A - n^2}{2n}\right)^2$.

$$\text{En effet, } \left\{ \begin{array}{l} \left(n + \frac{A - n^2}{2n}\right)^2 = n^2 + 2n \left(\frac{A - n^2}{2n}\right) + \left(\frac{A - n^2}{2n}\right)^2 \\ \qquad \qquad \qquad = A + \left(\frac{A - n^2}{2n}\right)^2 \end{array} \right.$$

¹⁸²- ZEMOULI, T. : *Al-Aḥmāl ar-riyyādīyya li Ibn al-Yāsamin (m.1204)* [L'œuvre mathématique d'Ibn al-Yāsamin], op. cit., p. 247.

Pour la deuxième expression, Ibn Munôm n'a donné aucune justification et n'a fait aucun commentaire. Son silence peut être expliqué par le fait que l'expression de l'erreur est semblable à celle de la précédente. C'est ce que montrent les calculs suivants :

$$\left\{ \begin{aligned} \left((n+1) - \frac{(n+1)^2 - A}{2(n+1)} \right)^2 &= (n+1)^2 - 2(n+1) \left(\frac{(n+1)^2 - A}{2(n+1)} \right) + \left(\frac{(n+1)^2 - A}{2(n+1)} \right)^2 \\ &= A + \left(\frac{(n+1)^2 - A}{2(n+1)} \right)^2 \end{aligned} \right.$$

De plus, comme $(A - n^2) > ((n+1)^2 - A)$ alors $\left(\frac{A - n^2}{2n} \right)^2 > \left(\frac{(n+1)^2 - A}{2(n+1)} \right)^2$.

Mais, si nous adoptons le raisonnement qu'Ibn Munôm a utilisé pour le calcul par approximation de la racine cubique d'un nombre, nous pouvons alors suggérer la preuve suivante :

On pose $\sqrt{A} = n + u$ on obtient $A - n^2 = 2nu + u^2$ (1)

Comme $0 < u < 1$ nous négligeons le terme u^2 pour avoir $A - n^2 \approx 2nu$

Par conséquent, $u \approx \frac{A - n^2}{2n}$ d'où $\sqrt{A} \approx n + \frac{A - n^2}{2n}$

Pour la deuxième expression, nous répétons le même raisonnement en posant $(n+1) = \sqrt{A} + u$ (2)

Nous avons alors $((n+1) - u)^2 = n^2 + r$. D'où $(2n+1) + u^2 = r + 2(n+1)u$

En négligeant le terme u^2 nous obtiendrons $(2n+1) - r \approx 2u(n+1)$

Ceci entraîne $u \approx \frac{(2n+1) - r}{2(n+1)}$.

Mais comme $(2n+1) - r = (n+1)^2 - A$ alors $\sqrt{A} \approx (n+1) - \frac{(n+1)^2 - A}{2(n+1)}$.

Al-Ḥaṣṣār n'a pas justifié ce procédé d'approximation dans *Kitāb al-Bayān*. En revanche, il a exposé plusieurs exemples pour montrer l'efficacité du procédé.

Nous ne savons pas s'il a donné une démonstration dans *al-Kāmil* car le chapitre qui contient son étude sur le calcul approché se trouve dans la partie non encore retrouvée¹⁸³. Mais, le renvoi d'Ibn Zakariyyā au *al-Kāmil* d'al-Ḥaṣṣār pour la preuve du procédé d'approximation de la racine cubique prouve que cet ouvrage contient des justifications sur les procédés d'approximation contrairement au *Kitāb al-Bayān*¹⁸⁴.

Formule 2

$$\sqrt{A} = \sqrt{n^2 + r} \approx x_1 - \frac{(x_1)^2 - A}{2x_1}$$

Où x_1 représente la première valeur approchée du nombre irrationnel \sqrt{A} obtenue par la formule 1.

Cette formule, qui est l'itération de la précédente, illustre le principe des approximations successives. Ce principe a été explicitement énoncé et utilisé par al-Ḥaṣṣār dans son ouvrage *Kitāb al-bayān* pour un nombre d'itération égale à 2.

Ibn Mun'im ne l'a pas énoncé de la même manière. Effectivement, après avoir exposé la formule 1, il a précisé qu'il est possible de considérer le carré le plus proche de A un nombre fractionnaire au lieu de l'entier n . Il a aussi déclaré que pour obtenir une meilleure précision il est préférable de prendre comme carré initial le nombre fractionnaire x_1 obtenu à partir de cette formule. Ainsi l'erreur est réduite au fur et à mesure que l'on répète le procédé. Il s'est basé sur des exemples bien précis pour appuyer ce résultat. Nous pouvons vérifier ses

arguments en s'assurant d'abord que $\left(n + \frac{A-n^2}{2n}\right)^2$ satisfait la condition de la deuxième

expression de la formule 1. Effectivement, $(A-n^2) > \left(\left(n + \frac{A-n^2}{2n}\right)^2 - A\right)$ car :

$$\left(\left(n + \frac{A-n^2}{2n}\right)^2 - A\right) = \left(\frac{A-n^2}{2n}\right)^2$$

¹⁸³- ABALLAGH, M. & DJEBBAR, A. : Découverte d'un écrit mathématique d'al-Ḥaṣṣār (XII^e s.) : le Livre I du Kāmil, *Historia Mathematica*, n° 14, (1987), pp. 147-158.

¹⁸⁴- IBN ZAKARIYYĀ. : *Ḥaṭṭ an-niqāb ba'āda raf' al-hijāb ān wujūh a'omāl al-ḥisāb* [Abaissement de la voilette après le lever du voile sur les formes des procédés du calcul], Ms. Tunis, B.N, n° 561, ff. 58b.

$$(A-n^2) - \left(\frac{A-n^2}{2n}\right)^2 = \frac{A-n^2}{4n} (5n^2 - A) > 0 \text{ puisque } A < (n+1)^2.$$

Ainsi, en appliquant la formule 1 on obtient l'expression qu'al-Ḥaṣṣār a énoncée c'est-à-dire :

$$\left(n + \frac{A-n^2}{2n}\right) - \frac{\left(\frac{A-n^2}{2n}\right)^2}{2\left(n + \frac{A-n^2}{2n}\right)}$$

Pour vérifier que la valeur calculée par ce procédé est meilleure, nous calculons d'abord l'erreur commise :

$$\left[\left(n + \frac{A-n^2}{2n}\right) - \frac{\left(\frac{A-n^2}{2n}\right)^2}{2\left(n + \frac{A-n^2}{2n}\right)}\right]^2 = A + \left[\frac{\left(\frac{A-n^2}{2n}\right)^2}{2\left(n + \frac{A-n^2}{2n}\right)}\right]^2$$

Ainsi l'erreur est par excès est vaut $\left[\frac{\left(\frac{A-n^2}{2n}\right)^2}{2\left(n + \frac{A-n^2}{2n}\right)}\right]^2$.

L'étude du signe de l'expression suivante : $\left(\frac{A-n^2}{2n}\right)^2 - \left[\frac{\left(\frac{A-n^2}{2n}\right)^2}{2\left(n + \frac{A-n^2}{2n}\right)}\right]^2$

Elle est du même signe que $\left(\frac{A-n^2}{2n}\right) - \left[\frac{\left(\frac{A-n^2}{2n}\right)^2}{2\left(n + \frac{A-n^2}{2n}\right)}\right]$.

$$\left(\frac{A-n^2}{2n}\right) - \left[\frac{\left(\frac{A-n^2}{2n}\right)^2}{2\left(n + \frac{A-n^2}{2n}\right)} \right] = \left(\frac{A-n^2}{2n}\right) \left[1 - \frac{\frac{A-n^2}{2n}}{2\left(n + \frac{A-n^2}{2n}\right)} \right] = \left(\frac{A-n^2}{2n}\right) \left[\frac{3n^2 + A}{4n\left(n + \frac{A-n^2}{2n}\right)} \right]$$

Puisque la dernière expression est strictement positive alors :

$$\left(\frac{A-n^2}{2n}\right)^2 > \left[\frac{\left(\frac{A-n^2}{2n}\right)^2}{2\left(n + \frac{A-n^2}{2n}\right)} \right]^2.$$

Ibn Munôim a proposé de répéter les calculs sur la deuxième valeur approchée mais il n'a pas calculé la troisième valeur dans les deux exemples qu'il a traités.

Al-Ḥaṣṣār a lui aussi proposé d'itérer le procédé en indiquant les calculs qu'il faut faire mais il n'a pas donné le résultat final dans l'exemple qu'il a traité.

Le procédé ainsi énoncé consiste à construire une suite de nombres $(x_n)_n$ à partir d'une valeur initiale x_1 calculée par la formule 1. La suite est définie ainsi :

$$\begin{cases} x_1 \\ x_n = x_{n-1} - \frac{(x_{n-1})^2 - A}{2x_{n-1}} \end{cases}$$

Cette suite est décroissante et minorée par \sqrt{A} donc convergente. Sa limite est $l = \sqrt{A}$.

Si on écrit $x_n = x_{n-1} - \frac{(x_{n-1})^2 - A}{2x_{n-1}} = \frac{1}{2} \left(x_{n-1} + \frac{A}{x_{n-1}} \right)$ on retrouve la méthode du calcul approchée attribuée aux babyloniens et aux grecs¹⁸⁵.

Formule 3

$$\sqrt{A} = \frac{\sqrt{A.b^2}}{b}$$

Ibn Munôim a précisé que l'application de cette formule s'étend aussi aux nombres fractionnaires. Il a ajouté que si b est choisi très grand alors le résultat sera plus précis. Il a même souligné que ce procédé est appliqué lorsqu'on veut obtenir une approximation meilleure. Cette remarque est en fait un résultat extrêmement important pour le calcul

¹⁸⁵ - Voir Annexe 1 et Annexe 2.

approché. Les mathématiciens de l'Orient ont considéré ce procédé d'approximation comme celui qui affine l'approximation. Pour $b=10^n$, ils lui ont donné l'appellation de « *procédé d'approximation par les zéros* ».

Nous allons prouver qu'effectivement si b est choisi très grand alors l'approximation est meilleure :

1- Tout d'abord, nous allons le vérifier à travers l'exemple suivant :

A	\sqrt{A} (utilisant la calculatrice)	b	\sqrt{A} (F3)
2	1,414213562	2	1,083333333
		3	1,416666667
		4	1,333333333
		5	1,414285714
		99	1,414069264
		900	1,395752022
		56789	1,414213562

Ce tableau montre que même si pour $b = 3$ on obtient une meilleure approximation que pour $b = 900$ mais à partir du nombre 56789 on aboutit presque toujours à la même valeur 1,414213562.

Nous avons, aussi, calculé la valeur du nombre $\sqrt{2}$ en appliquant les formules précédentes et nous avons obtenu les résultats suivants :

Comme $2=1^2 + 1$ alors :

$$\sqrt{2} \approx 1 + \frac{1}{2}; \quad \sqrt{2} \approx 1,5 \quad \text{d'après la première formule}$$

Si on pose $x_1=1,5$ nous aurons d'après la formule 2 :

$$x_2 = 1 + \frac{5}{12} \approx 1,4166666...6... \quad ; \quad x_3 = 1 + \frac{169}{408} \approx 1,414215683$$

Et $x_4 = 1 + \frac{195025}{470832} \approx 1,414213562$.

La troisième formule nous donne aussi le résultat à neuf chiffres après la virgule pour

$$b=10^4 \quad \text{c'est-à-dire à partir de } n \geq 4 \quad \text{lorsqu' on écrit } \sqrt{A} = \frac{\sqrt{A \cdot 10^{2n}}}{10^n}.$$

2- Nous allons maintenant montrer que le choix de b très grand garanti certainement une meilleure précision du procédé.

Posons $r = A - n^2$ et soit un entier $b > 1$. Calculons la valeur approchée de $\sqrt{Ab^2}$ en utilisant la première expression de la formule 1 :

Comme $n^2 < A < (n+1)^2$ alors $n^2b^2 < Ab^2 < (n+1)^2b^2$

n^2b^2 et $(nb+1)^2$ sont deux nombres carrés consécutifs et $(nb+1)^2 < (n+1)^2b^2$. Deux cas peuvent être envisagés :

Le premier cas

Si $n^2b^2 < Ab^2 < (nb+1)^2$ alors $\sqrt{Ab^2} \approx nb + \frac{r'}{2nb}$ avec $r' = rb^2$.

Par conséquent $\frac{\sqrt{Ab^2}}{b} \approx \frac{1}{b} \left(nb + \frac{r'}{2nb} \right) = n + \frac{r}{2n}$.

On conclut que pour des valeurs de b tel que les nombres carrés qui encadrent Ab^2 sont n^2b^2 , $(nb+1)^2$ on obtient la même valeur approchée calculée par la formule 1.

Le deuxième cas

Pour les valeurs de b qui vérifient $(nb+1)^2 < Ab^2 < (nb+2)^2$, nous avons :

$\sqrt{Ab^2} \approx nb+1 + \frac{r''}{2(nb+1)}$ avec $r'' = b^2r - 2nb - 1$

D'où $\sqrt{A} \approx n + \frac{1}{b} + \frac{r''}{2b(nb+1)}$

Comparaison des erreurs

$$\left(n + \frac{r}{2n} \right)^2 = A + \left(\frac{r}{2n} \right)^2$$

$$\left(nb+1 + \frac{r''}{2(nb+1)} \right)^2 = Ab^2 + \left(\frac{r''}{2(nb+1)} \right)^2$$

$$\text{Par conséquent, } \left[\frac{\left(nb+1 + \frac{r''}{2(nb+1)} \right)}{b} \right]^2 = \left(n + \frac{1}{b} + \frac{r''}{2b(nb+1)} \right)^2$$

$$\text{Et, } \left[\frac{\left(nb + 1 + \frac{r''}{2(nb+1)} \right)}{b} \right]^2 = A + \left(\frac{r''}{2b(nb+1)} \right)^2. \text{ L'erreur commise est alors par excès.}$$

Etude du signe de $\left(\frac{r''}{2b(nb+1)} \right)^2 - \left(\frac{r}{2n} \right)^2$:

$$\left(\frac{r''}{2b(nb+1)} \right) - \left(\frac{r}{2n} \right) = \frac{nr'' - rb(nb+1)}{2nb(nb+1)} = \frac{b^2nr - 2n^2b - n - nrb^2 - br}{2nb(nb+1)} = \frac{-2bn^2 - n - br}{2nb(nb+1)} < 0$$

Par conséquent $\left(\frac{r''}{2b(nb+1)} \right)^2 - \left(\frac{r}{2n} \right)^2 < 0$

Nous concluons que si le carré le plus proche de Ab^2 est $(nb+1)^2$ alors l'erreur commise par la formule 3 est plus précise que celle commise par la formule 1.

Si b est choisi encore plus grand, on pose le carré le plus proche égal à $(nb+k)^2$. Dans ce cas, nous avons $\sqrt{Ab^2} \approx nb+k + \frac{r''}{2(nb+k)}$ avec $r'' = b^2r - 2nbk - k^2$.

$$\sqrt{A} \approx n + \frac{k}{b} + \frac{r''}{2b(nb+k)} \text{ et } \left(nb + k + \frac{r''}{2(nb+k)} \right)^2 = Ab^2 + \left(\frac{r''}{2(nb+k)} \right)^2$$

$$\left[\frac{\left(nb + k + \frac{r''}{2(nb+k)} \right)}{b} \right]^2 = A + \left(\frac{r''}{2b(nb+k)} \right)^2 \text{ et l'erreur est par excès.}$$

Comme dans le cas précédent, nous avons :

$$\left(\frac{r''}{2b(nb+k)} \right) - \left(\frac{r}{2n} \right) = \frac{nr'' - rb(nb+k)}{2nb(nb+k)} < 0 \text{ de plus } \left(\frac{r''}{2b(nb+k)} \right) - \left(\frac{r'}{2b(nb+1)} \right) < 0$$

Par conséquent, l'erreur est encore plus petite.

II-2.2. Les procédés d'approximation de la racine carrée d'une fraction

Formule 1

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{ab}}{b}$$

Si (ab) n'est pas un carré parfait alors \sqrt{ab} sera calculé par approximation.

Al-Ḥaṣṣār a explicitement énoncé cette formule à travers des exemples. Quant à Ibn

Munôim, il l'a énoncée de la manière suivante : $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{N \cdot \left(\frac{a}{b}\right)}}{\sqrt{N}}$

N étant un carré choisi de telle sorte que $N \cdot \left(\frac{a}{b}\right)$ soit un entier.

Si on choisit $N = b^2$ on obtient $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)b^2}}{b}$.

C'est la formule qu'al-Ḥaṣṣār a utilisée lorsqu'il a calculé $\sqrt{\frac{1}{3}}$. Il a aussi exposé

d'autres méthodes que nous formulons ainsi :

Formule 2

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{(a.b).c^2}}{b.c}, \quad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right).(c.b)^2}}{c.b}, \quad \sqrt{\left(\frac{c}{d}\right)^2 + \frac{a}{b} - \left(\frac{c}{d}\right)^2} \approx \frac{c}{d} + \frac{\frac{a}{b} - \left(\frac{c}{d}\right)^2}{2\left(\frac{c}{d}\right)}$$

II-2.3. Les procédés d'approximation de la racine cubique d'un nombre entier

II-2.3.a. Préliminaires

1- Tout nombre entier A , qui n'est pas un cube parfait, est encadré par deux nombres cubes consécutifs : c'est-à-dire qu'il existe un nombre entier n tel que $n^3 \leq A < (n+1)^3$

Le calcul de n se fait en appliquant l'algorithme de l'extraction de la racine cubique d'un nombre cube parfait qui est essentiellement basé sur l'identité :

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Ibn Munôim a exposé les étapes de cet algorithme dans *Fiqh al-ḥisāb*, ainsi qu'Ibn al-Yāsamīn dans *Talqīh al-afkār fī l-ʿamal bi rushūm al-ghubār*. Al-Ḥaṣṣār a, lui aussi, décrit l'algorithme dans la partie retrouvée d'*al-Kāmil fī šināʾat al-ʿādad*. Mais son exposé est

incomplet car le premier volume s'interrompt justement dans la section consacrée à ce calcul¹⁸⁶.

2- L'extraction de la racine cubique d'un nombre cube parfait

L'algorithme de la racine cubique qui a été décrit dans les ouvrages de l'Occident musulman, qui nous sont parvenus, n'a pas une représentation qui le caractérise. Chaque opération partielle est effectuée en fonction des chiffres, qui déterminent la racine recherchée, et des coefficients 1 et 3 qui interviennent dans l'identité : $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$. Les étapes de cet algorithme sont indépendantes l'une de l'autre contrairement à celles de l'algorithme utilisé en Orient¹⁸⁷.

Nous allons donner quelques exemples pour expliciter la première et la deuxième étape de cet algorithme. Nous montrerons que, pour les étapes suivantes, il suffira de répéter la deuxième.

2- a. Nous supposons que le nombre dont on cherche la racine comporte quatre positions : $A = \overline{abcd}$

Comme $\sqrt[3]{10^{3k}} = 10^k$ alors les $(3k+1)^{ième}$ positions sont celles qui représentent les positions de la racine cubique. Les autres positions sont dites sourdes car les nombres $\sqrt[3]{10^{3k+1}}$, $\sqrt[3]{10^{3k+2}}$, avec k entier, sont irrationnels.

La terminologie qui est utilisée pour exprimer ce résultat consiste à compter de droite vers la gauche à partir de la première position de la manière suivante : *racine cubique, non racine cubique, non racine cubique, racine cubique*¹⁸⁸ ... et ainsi de suite. Le premier chiffre de la racine occupera la dernière position dans ce compte.

Comme $A = \overline{abcd}$ alors le nombre de positions qu'occupe le nombre $\sqrt[3]{A}$ est égal à 2.

Ainsi, on pose $\sqrt[3]{A} = \overline{uv}$ et on calcule les chiffres u et v par étapes comme suit :

La première étape :

Elle consiste à déterminer le plus grand entier u , compris entre 0 et 9 (nous l'avons déjà appelé chiffre), qui vérifie $u^3 \leq a$.

On calcule la différence $(a - u^3)$ et on place le résultat dans la position occupée par le nombre a après l'avoir effacé.

¹⁸⁶- Cette étude commence de la page 224 et s'interrompt à la page 234 du manuscrit de Marrakech. Voir ḤAṢṢĀR (al-) : *al-Kāmil fī šinā'āt al-ādād* [(Le (livre) complet dans la science du nombre)], Ms. Marrakech, n° 313, ff. 224-234.

¹⁸⁷- LAMRABET, D. : *Fiqh al-ḥisāb* [La science du calcul], op. cit., pp. 73-80.

¹⁸⁸- L'expression utilisée par les mathématiciens arabes est la suivante : *kaḏb, lā kaḏb, lā kaḏb, kaḏb, lā kaḏb, lā kaḏb, kaḏb...*

Ensuite, on calcule les produits $(3u^2)$ et $(3u)$ et on place les résultats respectivement en dessous des chiffres b et c .

La deuxième étape

Elle consiste à déterminer le plus grand entier v , compris entre 0 et 9 qui vérifie $100\left(\overline{(3u^2)v}\right) + 10\left(\overline{(3u)v^2}\right) + v^3 \leq \overline{(a-u^3)bcd}$.

Si A est un cube parfait alors on aura forcément $100\left(\overline{(3u^2)v}\right) + 10\left(\overline{(3u)v^2}\right) + v^3 = \overline{(a-u^2)bcd}$

D'où la représentation :

$$\begin{array}{cccc} \dot{a} & \dot{b} & \dot{c} & \dot{d} \end{array} \rightarrow \begin{array}{cccc} & & & u \\ & & & \left(a-u^3\right) \\ & & b & c & d \\ & & 3u^2 & 3u & \\ & & & & \leftarrow \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} & & & u \\ & & & \left(a-u^3\right) \\ & & b & c & d \\ & & 3u^2 & 3u & v \end{array}$$

Puis, on termine les calculs intermédiaires dans l'ordre suivant :

$$\begin{aligned} \overline{(a-u^3)b} - 3u^2.v &= \bar{e} \\ \bar{e}c - 3u.v^2 &= \bar{f} \\ \bar{f}d - v^3 &= 0 \end{aligned}$$

2-b. Si le nombre de position de A est supérieur à 4, on procède de la manière suivante : D'abord, on inscrit les chiffres u et v dans les positions indiquées et nous effaçons les résultats des opérations intermédiaires. Puis, on poursuit les calculs en répétant la deuxième étape.

Soit par exemple $A = \overline{abcdxyz}$

Nous supposons que : $\bar{f}d - v^3 = g \neq 0$. D'où la représentation qui suit la précédente :

$$\begin{array}{cccc} & & & u & v \\ & & & \bar{g} & x & y & z \end{array}$$

La troisième étape

Nous effectuons d'abord les calculs suivants $\left(3(\overline{uv})^2 = 3(10u + v)^2\right)$ et $\left(3(\overline{uv})\right)$ et plaçons les résultats en dessous des positions indiquées dans la première étape de la manière suivante :

$$\begin{array}{cccc} \overline{u} & \overline{v} & & \\ \dot{g} & x & y & \dot{z} \\ & 3(\overline{uv})^2 & 3(\overline{uv}) & \end{array}$$

Puis, nous chercherons à déterminer le plus grand entier w ($0 \leq w \leq 9$) qui vérifie :

$$\left[100\left(3(\overline{uv})^2 \cdot w\right) + 10\left(3(\overline{uv})w^2\right) + w^3\right] \leq \overline{gxyz}$$

Une fois l'entier est déterminé, nous calculons la différence $\overline{gxyz} - \left[100\left(3(\overline{uv})^2 \cdot w\right) + 10\left(3(\overline{uv})w^2\right) + w^3\right]$ en effectuant les calculs intermédiaires comme suit :

$$\overline{gx} - 3(\overline{uv})^2 \cdot w = \overline{h}$$

$$\overline{hy} - 3(\overline{uv})w^2 = \overline{i}$$

$$\overline{iz} - w^3 = \overline{j}$$

Les résultats des calculs : $\overline{e}, \overline{f}, \overline{g}, \overline{h}, \overline{i}, \overline{k}$ sont des nombres et non pas des chiffres.

Si le nombre de position est plus grand, l'algorithme se poursuit en utilisant le même raisonnement c'est-à-dire en éliminant les résultats des calculs intermédiaires et en gardant les chiffres u, v et w inscrits dans leurs positions indiquées.

II-2.3.b. Les formules d'approximation

Comme nous l'avons déjà signalé, Ibn al-Yāsamin n'a pas évoqué le calcul approché des racines cubiques dans *Talqīh al-afkār*. Quant à l'étude d'al-Ḥaṣṣār sur le calcul de la racine cubique d'un nombre par des procédés d'approximation, elle est contenue dans le deuxième volume, non encore retrouvé, de son ouvrage intitulé *al-Kāmil*. Aussi, notre présentation sera entièrement basée sur l'étude qu'Ibn Munōim a consacrée à ce calcul.

Si un nombre A n'est pas un cube parfait il s'écrira $A = n^3 + r$, n étant calculé par l'algorithme de l'extraction de la racine cubique de A . Il vérifie $n^3 < A < (n+1)^3$.

Pour déterminer une valeur approchée de $\sqrt[3]{A}$, Ibn Munôim a proposé deux formules :

Formule 1

$$\sqrt[3]{A} = \sqrt[3]{n^3 + r} \approx n + \sqrt{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{3n^2}{3n+1}\right)\right)^2 + \frac{A-n^3}{3n+1} - \frac{1}{2}\left(\frac{3n^2}{3n+1}\right)}$$

Il a explicité les opérations qui interviennent dans la formulation de ce procédé à travers un seul exemple qui est $A=70$.

La justification¹⁸⁹

Pour justifier cette formule, l'auteur a emprunté une démarche algébrique après avoir utilisé $u^2 \approx u^3$ lorsque le nombre positif u est supposé plus petit que 1.

Si on pose $\sqrt[3]{A} = n+u$ avec $0 < u < 1$ on obtient $A = n^3 + 3n^2u + 3nu^2 + u^3$.

Puis, en supposant $u^2 \approx u^3$ on aura $A - n^3 \approx 3n^2u + (3n+1)u^2$

Pour déterminer la valeur de l'inconnue u , on résout l'équation suivante :

$$u^2 + \left(\frac{3n^2}{3n+1}\right)u = \frac{A-n^3}{3n+1}$$

C'est une équation quadratique dont la solution est :

$$u = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{3n^2}{3n+1}\right)\right)^2 + \frac{A-n^3}{3n+1} - \frac{1}{2}\left(\frac{3n^2}{3n+1}\right)}$$

$$\text{Ainsi } \sqrt[3]{A} \approx n + \left[\sqrt{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{3n^2}{3n+1}\right)\right)^2 + \frac{A-n^3}{3n+1} - \frac{1}{2}\left(\frac{3n^2}{3n+1}\right)} \right]$$

L'erreur commise par ce procédé est par défaut mais Ibn Munôim n'a pas fait allusion à cet aspect particulier.

Effectivement, $A - (n+u)^3 = A - [n^3 + 3n^2u + 3nu^2 + u^3]$

Or, en posant $P(x) = x^2 + \left(\frac{3n^2}{3n+1}\right)x - \frac{A-n^3}{3n+1}$ nous aurons :

¹⁸⁹ - Pour justifier ce procédé, Ibn Munôim s'est basé sur le même exemple : $A = 70$.

$$(3n+1)P(u) - (3n+1)u^2 + (A-n^3) = 3n^2u \quad \text{avec } P(u)=0.$$

$$\text{D'où } A - (n+u)^3 = A - \left[n^3 + \left[(A-n^3) - (3n+1)u^2 \right] + 3nu^2 + u^3 \right]$$

$$\text{Ainsi, } A - (n+u)^3 = u^2 - u^3 > 0.$$

Formule 2

$$\sqrt[3]{A} = \sqrt[3]{n^3 + r} \approx (n+1) - \left[\frac{1}{2} \left(\frac{3(n+1)^2}{3(n+1)-1} \right) - \sqrt{\left[\frac{1}{2} \left(\frac{3(n+1)^2}{3(n+1)-1} \right)^2 - \frac{(n+1)^3 - A}{3(n+1)-1} \right]} \right]$$

Ibn Munômim a énoncé cette formule en choisissant $A=42$. Il a explicité toutes les opérations qui interviennent dans la formulation du procédé à travers cet exemple.

La justification¹⁹⁰

Si on pose $\sqrt[3]{A} = (n+1) - v$ avec $0 < v < 1$, on obtient

$$A = (n+1)^3 - 3(n+1)^2v + 3(n+1)v^2 - v^3$$

En supposant $v^2 \approx v^3$ on aura $(n+1)^3 - A \approx 3(n+1)^2v - (3(n+1)-1)v^2$

Comme pour le cas précédent, on résout l'équation quadratique suivante dont l'inconnue est v :

$$v^2 + \left(\frac{(n+1)^3 - A}{3(n+1)-1} \right) = \frac{3(n+1)^2}{3(n+1)-1} v$$

$$\text{La solution est } v = \frac{1}{2} \left(\frac{3(n+1)^2}{3(n+1)-1} \right) - \sqrt{\left(\frac{1}{2} \left(\frac{3(n+1)^2}{3(n+1)-1} \right) \right)^2 - \frac{(n+1)^3 - A}{3(n+1)-1}}$$

$$\text{D'où } \sqrt[3]{A} \approx (n+1) - \left[\frac{1}{2} \left(\frac{3(n+1)^2}{3(n+1)-1} \right) - \sqrt{\left[\frac{1}{2} \left(\frac{3(n+1)^2}{3(n+1)-1} \right)^2 - \frac{(n+1)^3 - A}{3(n+1)-1} \right]} \right]$$

L'erreur commise est par excès car :

$$((n+1)-u)^3 - A = \left[(n+1)^3 - 3(n+1)^2u + 3(n+1)u^2 - u^3 \right] - A$$

¹⁹⁰- Dans la démonstration, il posé $A = 42$.

Or, en posant $P(x) = x^2 + \left(\frac{(n+1)^3 - A}{3(n+1)-1} \right) - \frac{3(n+1)^2}{3(n+1)-1} x$ on aura :

$$(3(n+1)-1)u^2 + \left((n+1)^3 - A \right) - P(u) = 3(n+1)^2 u \quad \text{avec } P(u) = 0.$$

$$\text{D'où } \left((n+1)-u \right)^3 - A = \left[(n+1)^3 - \left[(3(n+1)-1)u^2 + \left((n+1)^3 - A \right) \right] + 3(n+1)u^2 - u^3 \right] - A$$

$$\text{Ainsi } \left((n+1)-u \right)^3 - A = u^2 - u^3 = u^2(1-u) > 0.$$

Ibn Munôim n'a pas évoqué la nature de la valeur obtenue par cette formule. Mais il a indiqué que ce calcul ainsi que le précédent utilisent deux valeurs approchées : la première au niveau de l'opération $u^2 \approx u^3$. Quant à la deuxième, elle est obtenue en appliquant les procédés d'approximation de la racine carrée dans l'évaluation des nombres suivants :

$$\left[\sqrt{\left(\frac{1}{2} \left(\frac{3n^2}{3n+1} \right) \right)^2 + \frac{A-n^3}{3n+1}} \right], \sqrt{\left(\frac{1}{2} \left(\frac{3(n+1)^2}{3(n+1)-1} \right) \right)^2 - \frac{(n+1)^3 - A}{3(n+1)-1}}$$

Aussi, il a conclu que l'erreur commise est importante car elle est une accumulation de deux erreurs produites dans ces deux étapes principales du calcul. Cependant, il n'a pas étudié la possibilité de la minimiser comme il l'avait fait pour la racine carrée. De plus, le calcul approché de la racine cubique n'a pas été suivi de méthodes pour affiner l'approximation.

II-2.4. Le procédé d'approximation de la racine cubique d'une fraction

Formule

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{\frac{a}{b}(kb)^3}}{kb}$$

Ibn Munôim a précisé qu'il faut choisir (kb) assez grand pour obtenir une valeur plus précise.

L'idée de ce procédé est basée sur le principe de multiplier la fraction par un nombre afin d'obtenir un entier. Ainsi, le calcul de la racine d'une fraction sera ramené au calcul de la racine cubique de l'entier qui est égal à $\left(\frac{a}{b} \right) (kb)^3 = ab^2 k^3$.

Nous constatons que si $k=10^n$ alors le nombre $\left[\sqrt[3]{ab^2 k^3} \right]$, obtenu en appliquant l'algorithme d'extraction de la racine cubique, offre une très bonne précision une fois qu'il est

divisé par (kb) . Nous avons déjà exposé ce résultat dans la première partie qui traite les procédés d'approximation en Orient. Nous signalons qu'Ibn Munôim n'a pas spécifié une valeur pour k et n'a pas distingué de cas particuliers. Nous avons évoqué le cas $k=10^n$ seulement pour montrer l'importance de sa remarque à propos du choix de (kb) .

Preuve

Ibn Munôim a exposé la justification du procédé sur un exemple précis.

Nous pouvons la généraliser ainsi :

$$\text{Puisque } \frac{a}{b} = \frac{ab^2}{b^3} \text{ alors } \sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{ab^2}}{b}$$

$$\text{Aussi } \sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{(ab^2)k^3}}{kb} \text{ d'où la formule } \sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{\frac{a}{b}(kb)^3}}{kb}$$

II-3. Les procédés d'approximation dans *Talkhīṣ aômāl al-ḥisāb* d'Ibn al-Bannā et dans certains de ses commentaires

Les écrits mathématiques d'Ibn al-Bannā qui étaient connus dans les milieux scientifiques de l'Occident musulman sont *Kitāb al-uṣūl wa l-muqaddimāt fī l-jabr wa l-muqābala*¹⁹¹, *Talkhīṣ aômāl al-ḥisāb*¹⁹² et *Rafô al-ḥijāb ôan wujūh aômāl al-ḥisāb*¹⁹³. La production mathématique après le XIV^e siècle s'est essentiellement inspirée du contenu de ces trois écrits. Tous les ouvrages, qui nous sont parvenus, ont reproduit les notions, les méthodes et les problèmes qu'Ibn al-Bannā avait étudiés et commentés.

Dans son livre d'algèbre, Ibn al-Bannā n'a pas évoqué des méthodes de résolution qui ne sont pas algébriques. En outre nous n'avons trouvé aucun signe de résolution par des méthodes d'approximation.

Le *Talkhīṣ aômāl al-ḥisāb* est l'ouvrage qui a été le plus commenté en Occident musulman. C'est ce qu'affirment les commentaires qui ont été exhumés depuis une vingtaine

¹⁹¹ - Djebbar a exposé les résultats de son analyse du contenu du *Kitāb al-uṣūl* à plusieurs reprises et a présenté une édition du texte suivie d'une traduction française dans sa thèse de doctorat : DJEBBAR, A. : *Mathématiques et mathématiciens dans le Maghreb médiéval*, op. cit.

¹⁹² - SOUSSI, M. : *Ibn al-Bannā al-Marrākushī, Talkhīṣ aômāl al-ḥisāb. Edition*, traduction française et commentaires, Tunis, Publication de l'université de Tunis, 1969.

¹⁹³ - ABALLAGH, M. : *Rafô al-ḥijāb d'Ibn al-Bannā*, op. cit.

d'années¹⁹⁴. Les études récentes ont aussi montré qu'il était un des manuels d'enseignement des mathématiques dans la région et qu'il a eu un impact considérable dans la rédaction d'un grand nombre d'ouvrage. Les énoncés du *Talkhīs* ont été repris, reproduits et commentés dans la majorité des écrits qui ont été publiés à partir de la première moitié du XIV^e siècle¹⁹⁵.

Dans le dernier chapitre de la première partie du *Talkhīs*, Ibn al-Bannā a exposé des procédés pour calculer la racine carrée des nombres entiers et des fractions. Il a énoncé des règles de calcul et des formules d'approximation mais sans les justifier. Et, comme les autres parties de son livre, les exemples sont absents.

Le troisième ouvrage d'Ibn al-Bannā intitulé *Rafō al-ḥijāb ōan wujūh aōmāl al-ḥisāb* a été conçu à la fois comme un commentaire et comme un complément du *Talkhīs*¹⁹⁶.

Son analyse a montré qu'il contient des éléments nouveaux qui ont enrichi les thèmes du *Talkhīs*, en particulier l'étude des équations algébriques et des polynômes¹⁹⁷. Le calcul par approximation de la racine carrée d'un nombre a lui aussi été complété par des énoncés nouveaux. Il a été développé dans le chapitre sur les nombres radicaux comme dans le *Talkhīs*.

L'élément qui caractérise la nouvelle étude d'Ibn al-Bannā sur le calcul approché est l'introduction de preuve comme un moyen pour exposer des outils algébriques et numériques permettant de retrouver les différentes formulations qu'il a données dans le *Talkhīs*. Elle propose aussi des indications sur la terminologie choisie pour les énoncer. En faisant cela, Ibn al-Bannā aurait répondu aux questions et aux critiques qui auraient été exprimées à propos du contenu de ce chapitre.

Dans ce même ouvrage, Ibn al-Bannā a énoncé un procédé d'approximation de la racine cubique. Il l'a brièvement exposé et commenté dans le premier chapitre de ce livre consacré aux nombres entiers¹⁹⁸.

¹⁹⁴ - ABALLAGH, M. & DJEBBAR, A. : *Ḥayāt wa mu'allafāt Ibn al-Bannā al-murrākushī* [La vie et l'œuvre d'Ibn-Bannā al-murrākushī], op. cit., 70-76.

¹⁹⁵ - La majorité de ces ouvrages ont été conçus dans le but de commenter le contenu du *Talkhīs*.

¹⁹⁶ - IBN KHALDŪN : *al-Maqaddima*, op. cit., p. 483.

¹⁹⁷ - Voir DJEBBAR, A. : *Mathématiques et mathématiciens dans le Maghreb médiéval*, op. cit., p. 114. ABALLAGH, M. : *Rafō al-ḥijāb d'Ibn al-Bannā*, op. cit.

¹⁹⁸ - ABALLAGH, M. : *Rafō al-ḥijāb*, op. cit., p. 296, 405-410

Dans cette section, nous allons présenter les différentes formules qui ont été énoncées par Ibn al-Bannā et par certains mathématiciens du XIV^e siècle pour le calcul de la racine carrée et de la racine cubique d'un nombre entier et fractionnaire.

II-3.1. Les procédés d'approximation dans le *Talkhīṣ a'ômāl al-ḥisāb* et le *Raf'ô al-ḥijāb ân wujūh a'ômāl al-ḥisāb*

Dans cette partie, nous présentons les formules qui ont été énoncées dans le *Talkhīṣ*. Nous ferons suivre chaque énoncé par les commentaires d'Ibn al-Bannā qui se trouvent dans le *Raf'ô al-ḥijāb*. Lorsqu'un énoncé du *Talkhīṣ* est complété dans le *Raf'ô al-ḥijāb* par un autre qui lui est équivalent, nous exposerons le deuxième énoncé après le premier sous forme de résultat.

II-3.1.a. Les procédés d'approximation de la racine carrée d'un nombre entier

II-3.1.a.1. Rappel

Pour tout nombre entier A il existe un entier n tel que $A = n^2 + r$. n est obtenu par l'algorithme d'extraction de la racine carré et $r < 2n + 1$.

Si $r \neq 0$ alors \sqrt{A} est un nombre irrationnel dont la valeur est déterminé par approximation.

II-3.1.a.2. Les formules d'approximation

Formule 1

$$\text{Si } r \leq n \quad \text{alors } \sqrt{A} = \sqrt{n^2 + r} \approx n + \frac{r}{2n}$$

$$\text{Si } r > n \quad \text{alors } \sqrt{A} = \sqrt{n^2 + r} \approx n + \frac{r+1}{2n+2}$$

Cette formule a été énoncée dans le *Talkhīṣ*¹⁹⁹ puis commentée et justifiée dans le *Raf'ô al-ḥijāb*.

¹⁹⁹- SOUISSI, M. : *Ibn al-Bannā al-Marrākushī, Talkhīṣ a'ômāl al-ḥisāb*, [Ibn al-Bannā de Marrakech, l'Abrégé des opérations du calcul], op. cit., p. 64

Ce procédé d'approximation n'est pas très différent de celui d'Ibn Munôim et d'al-Ḥaṣṣār. Mais, l'élément nouveau qui le caractérise est la présence des deux conditions dans l'énoncé.

En effet, pour déterminer si le nombre A est plus proche du premier carré ou du deuxième carré qui l'encadrent, Ibn al-Bannā s'est basé sur l'écart entre le reste $(A - n^2)$ et n .

Dans le *Rafô al-ḥijāb*, il a comparé les deux quantités $(A - n^2)$ et $((n + 1)^2 - A)$ puis il a démontré l'égalité des expressions qu'il a données dans le *Talkhīṣ* avec celles énoncées par les mathématiciens antérieurs.

Ibn al-Bannā n'a pas présenté d'arguments qui expliquent la nouvelle formulation. Mais, il a exposé l'idée principale du raisonnement qui permet d'aboutir aux deux expressions du procédé sans évoquer les conditions qui les accompagnent. Son raisonnement repose sur l'écriture du nombre irrationnel \sqrt{A} sous la forme $\sqrt{A} = n + \frac{p}{q}$ avec p, q des entiers qui vérifient $\left(\frac{p}{q}\right) < 1$.

La justification²⁰⁰

La première formule

Si on pose $\sqrt{A} = n + u$ on aura $A - n^2 = 2nu + u^2$

Aussi, avec $u^2 \approx 0$ nous pouvons soustraire²⁰¹ le carré de u du second membre de l'égalité et obtenir $A - n^2 \approx 2nu$. Ce qui entraîne $u \approx \frac{A - n^2}{2n}$.

D'où $\sqrt{A} \approx n + \frac{A - n^2}{2n}$.

La deuxième formule

En posant $(n + 1) = \sqrt{A} + u$ on aura $(n + 1)^2 - A = u^2 + 2\sqrt{A}.u$

Et en considérant $u^2 \approx 0$ nous pouvons l'ajouter au deuxième membre de l'égalité et obtenir : $(n + 1)^2 - A \approx 2u^2 + 2\sqrt{A}.u = 2u(\sqrt{A} + u) = 2u(n + 1)$

²⁰⁰ - ABALLAGH, M. : *Rafô al-ḥijāb*, op. cit., pp. 408-410

²⁰¹ - En utilisant l'expression de « soustraire » et non pas de « négliger », Ibn al-Bannā a, à notre sens, introduit une terminologie qui permet d'exprimer l'opération d'ajouter ou de soustraire des quantités très petites à un membre d'une équation donnée.

Par conséquent, $u \approx \frac{(n+1)^2 - A}{2(n+1)}$ et $\sqrt{A} \approx (n+1) - u = n + \frac{r+1}{2n+2}$.

Nous allons proposer une autre démonstration qui fait apparaître les conditions posées par Ibn al-Bannā. Le raisonnement qu'on va adopter ressemble beaucoup à celui qui est utilisé dans le calcul par approximation de la racine carrée présenté par Héron.

La notion de la moyenne arithmétique a été évoquée au moins deux fois dans les deux ouvrages d'Ibn al-Bannā : Dans le chapitre sur les approximations et dans une autre étude consacrée à la résolution des équations. Aussi, nous allons l'utiliser ainsi que l'idée d'encadrer A par les nombres suivants n , $(n+1)$ et $\frac{A}{n}$. Deux cas sont alors possibles :

Premier cas : $n < \sqrt{A} < \frac{A}{n} < (n+1)$

Lorsque $\frac{A}{n} < (n+1)$ on a $\frac{n^2 + r}{n} < (n+1)$. Ce qui entraîne $r < n$

Dans ce cas, nous pouvons considérer la moyenne arithmétique entre les deux nombres, qui encadrent \sqrt{A} , pour aboutir à la première expression : $\frac{1}{2} \left(n + \frac{A}{n} \right) = n + \frac{r}{2n}$

Par conséquent, la condition $r < n$ ainsi que la première formule d'approximation $\sqrt{A} \approx n + \frac{r}{2n}$ seraient directement déduites des inégalités $\left(n < \sqrt{A} < \frac{A}{n} \right)$ et $\frac{A}{n} < (n+1)$.

Deuxième cas : $n < \sqrt{A} < (n+1) < \frac{A}{n}$

Lorsque $\frac{A}{n} > (n+1)$ on a $\frac{n^2 + r}{n} > (n+1)$. Par conséquent $r > n$.

Or, $\sqrt{A} > \frac{A}{n+1}$ puisque $(n+1)^2 > A$. D'où $\frac{A}{n+1} < \sqrt{A} < (n+1)$

Nous pouvons, là aussi, considérer la moyenne arithmétique entre les deux nombres qui encadrent \sqrt{A} et aboutir à la deuxième expression : $\frac{1}{2} \left((n+1) + \frac{A}{n+1} \right) = n + \frac{r+1}{2n+2}$.

Dans le *Raf' al-ḥijāb*, Ibn al-Bannā a présenté d'autres énoncés qui ne sont pas évoqués dans le *Talkhīṣ*. Nous les exposons sous forme de résultats comme suit :

Résultat 1

Si $\left[A - n^2 > n \right]$ alors $\left[A - n^2 > \left((n+1)^2 - A \right) \right]$ et $(n+1) - \frac{(n+1)^2 - A}{2(n+1)} = n + \frac{r+1}{2n+2}$.

Nous pouvons le vérifier ainsi :

$$(n+1)^2 - A = (2n+1) - (A - n^2)$$

Comme $\left[A - n^2 > n \right]$ alors $\left[(n+1)^2 - A \right] < (n+1)$

Par conséquent, $\left[(n+1)^2 - A \right] \leq n$ et $\left[A - n^2 > \left((n+1)^2 - A \right) \right]$.

Dans ce cas, $(n+1) - \frac{(n+1)^2 - A}{2(n+1)} = n + \left(1 - \frac{n^2 + 2n + 1 - A}{2n+2} \right) = n + \frac{r+1}{2n+2}$.

Ibn al-Bannā a ainsi démontré que la deuxième expression de la formule 1 est la même que celle qui est connue par les mathématiciens antérieurs.

Résultat 2

L'erreur commise par ce procédé d'approximation est par excès.

Nous avons déjà évalué cette erreur dans la section précédente à $\left(\frac{r}{2n} \right)^2$ pour la première expression.

Pour la deuxième expression, nous avons établi qu'elle vaut $\left(\frac{(n+1)^2 - A}{2(n+1)} \right)^2$.

Mais, en utilisant la formulation d'Ibn al-Bannā, elle serait égale à $\frac{n-r}{n+1} + \left(\frac{r+1}{2n+2} \right)^2$.

Nous signalons qu'Ibn al-Bannā n'a pas calculé la valeur de cette erreur, il a seulement précisé qu'elle est par excès.

Résultat 3

1- Si $\left((n+1)^2 - A \right) > (n+1)$ alors $\sqrt{A} \approx (n+1) - \frac{\left((n+1)^2 - A \right) - 1}{2(n+1) - 2}$

En effet, si $\left((n+1)^2 - A \right) > (n+1)$ alors $\left(n^2 + 2n + 1 - A \right) > (n+1)$ et $\left(A - n^2 \right) < n$.

Et inversement.

De plus, nous avons $(n+1) - \frac{((n+1)^2 - A) - 1}{2(n+1) - 2} = n + \frac{A - n^2}{2n}$.

2- Si $((n+1)^2 - A) = (n+1)$ alors $A - n^2 = n$

Dans ce cas, $A = n(n+1)$ et A est considéré comme une moyenne proportionnelle :

$$\frac{A}{n^2} = \frac{(n+1)^2}{A}$$

La valeur approchée de \sqrt{A} est déterminée en tant que moyenne arithmétique entre les deux racines n et $(n+1)$: $\sqrt{A} \approx \frac{1}{2}((n+1) + n)$ ²⁰².

Formule 2

$$\sqrt{A} = \sqrt{n^2 + r} \approx x_1 - \frac{(x_1)^2 - A}{2x_1}$$

Où x_1 représente la première valeur approchée du nombre irrationnel \sqrt{A} .

Comme nous l'avons déjà indiqué, cette formule est l'itération de la formule précédente. Elle illustre le principe des approximations successives qui a été énoncé et utilisé par al-Ḥaṣṣār. Ibn al-Bannā lui a attribué l'appellation "*affinement de l'approximation*" qui exprime parfaitement l'idée de minimiser l'erreur²⁰³. Il n'a pas fait de commentaire sur sa formulation et il n'a pas proposé de preuve pour sa validité.

Une seule indication dans le *Rafô al-ḥijāb* pourrait nous éclairer sur le raisonnement qu'il a utilisé. On la découvre dans l'énoncé de la deuxième expression de la première formule dans lequel Ibn al-Bannā a ajouté la phrase suivante « *comme nous l'avons indiqué dans l'affinement de l'approximation* »²⁰⁴. Ibn al-Bannā signale ainsi que lorsqu'on calcule la racine en fonction du plus grand carré c'est-à-dire $(n+1)^2$, on doit toujours retrancher une quantité à la racine de ce carré. Aussi, en constatant que x_1 , calculé par le premier procédé, vérifie $(x_1)^2 > \sqrt{A}$, alors la deuxième expression de la formule 1 permet de retrouver

²⁰²- Cette formule coïncide avec les deux formules du premier procédé appliquées pour le cas particulier $r = n$. Elle a été énoncée explicitement dans le *Rafô al-ḥijāb* vers la fin de la section consacrée au calcul de la racine carrée.

²⁰³- Ibn al-Bannā a utilisé l'expression "*tadqīq at-taqrīb*" que Souissi a traduit par "*raffinement de l'approximation*". Voir SOUISSI, M. : *Ibn al-Bannā al-Marrākushī, Talkhīṣ aḥmāl al-ḥisāb*, op. cit., p.64

²⁰⁴- Ibn al-Bannā s'est exprimé de la manière suivante « *kamā dhakarnā hādihā l-āmal fī tadqīq at-taqrīb* ». ABALLAGH, M. : *Rafô al-ḥijāb*, op. cit., p. 408.

l'énoncé de la formule 2 en calculant une deuxième valeur approchée en fonction du plus grand carré qui est $(x_1)^2$.

L'efficacité du procédé a, certes, été signalée mais elle n'a pas été vérifiée dans les deux ouvrages d'Ibn al-Bannā ni d'une manière théorique ni par le moyen des tests ou des exemples comme l'ont fait des commentateurs après.

Formule 3

$$\sqrt{A} = \frac{\sqrt{Ab^2}}{b}$$

Dans le *Rafō al-hijāb*, Ibn al-Bannā a indiqué que ce procédé d'approximation est surtout utilisé lorsque le nombre A est exprimé dans la base sexagésimale. Dans ce cas b est choisi comme une puissance de 60.

Il a ajouté que ce calcul utilise les procédés précédents ce qui implique que le numérateur doit être calculé en appliquant des formules d'approximation.

Ibn al-Bannā, n'a pas signalé l'efficacité de ce procédé aussi et il ne l'a pas considéré comme un moyen pour affiner l'approximation.

II-3.1.b. Les procédés d'approximation de la racine carrée d'une fraction

Formule 1

Pour tous nombres a et b nous avons :

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)b^2}}{b}$$

Ibn al-Bannā a, de plus, donné une formule équivalente à celle-ci qui est la suivante :

$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a.b}}{b}$. Il a aussi précisé que le numérateur $\sqrt{a.b}$ est calculé par approximation en appliquant les formules précédentes

Preuve

La preuve de ce procédé est basée sur la relation suivante : $\sqrt{a.b} = \sqrt{a}.\sqrt{b}$

Nous pouvons exprimer l'idée d'Ibn al-Bannā ainsi :

$$\frac{\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)b^2}}{b} = \frac{\sqrt{\frac{a}{b}} \cdot \sqrt{b^2}}{b} = \frac{\sqrt{\frac{a}{b}} \cdot b}{b} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

Formule 2

Si a et b sont des carrés parfaits alors :

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

Cette égalité exprime la division de deux nombres radicaux. C'est probablement la raison pour laquelle Ibn al-Bannā ne l'a pas répétée dans le *Raf' al-ḥijāb*.

II-3.1.c. Les procédés d'approximation de la racine cubique d'un nombre entier

Dans le *Raf' al-ḥijāb*, l'étude de la racine cubique d'un nombre n'a pas été abordée après celle de la racine carrée. L'ordre dans lequel ces deux études ont été présentées a été plutôt inversé. La première n'a occupé qu'un petit paragraphe d'une section du premier chapitre sur les nombres entiers. La deuxième, plus développée, occupe toute une section du chapitre sur les nombres radicaux.

Pour justifier son étude partielle et succincte de la racine cubique d'un nombre, Ibn al-Bannā a qualifié ce sujet de long et de peu d'utilité. Il a aussi précisé que la racine cubique n'intervient pas dans le domaine des mathématiques autant que la racine carrée qui est souvent utilisée dans les textes algébriques et dans les quantités qui y sont traitées, parce qu'elle est, à ses yeux, le fondement de l'algèbre. Ce sont les arguments qu'il a exposés pour justifier l'absence de cette étude dans le *Talkhīṣ* et pour expliquer sa présence modeste et écourtée dans le *Raf' al-ḥijāb*.

Nous rappelons que l'algorithme de la racine cubique tel qu'il a été présenté dans les ouvrages anciens, utilise uniquement deux étapes : la première est exécutée une seule fois et vise à déterminer le premier chiffre de la racine. Quant à la deuxième, elle est répétée jusqu'à épuisement de toutes les positions du nombre, dont on veut calculer la racine. Elle consiste à appliquer la formule $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2$ à chaque étape du calcul d'un des chiffres restants de la racine. Cette étape rassemble des calculs secondaires qui n'ont aucune spécificité pour la représentation globale de l'algorithme. Il est possible que cet algorithme,

qui est effectivement long et surtout dans lequel les calculs intermédiaires sont plusieurs fois répétés, n'ait pas présenté un intérêt particulier pour Ibn al-Bannā²⁰⁵.

Cependant, l'étude qu'il a consacrée à la détermination d'une valeur approchée du nombre irrationnel $\sqrt[3]{A}$, est significative car il a invoqué certains principes qui sont importants pour le calcul approché. La particularité de son travail réside dans la formulation du procédé d'approximation qu'il a proposé et aussi dans les indications qu'il a données pour d'explicitier les principales étapes du calcul approché. Celles-ci nous ont aidées à reconstituer la démonstration d'Ibn al-Bannā.

Dans cette section, nous présentons le procédé d'approximation de la racine cubique d'un nombre qu'Ibn al-Bannā a exposé en précisant ses étapes les plus importantes. Nous ferons suivre cette présentation de quelques commentaires que suggère la comparaison de ce procédé avec celui d'Ibn Munôim.

Les formules d'approximation

Formule 1

$$\sqrt[3]{A} = \sqrt[3]{n^3 + r} \approx \frac{n}{2} + \sqrt{\frac{A - n^3}{3n} + \left(\frac{n}{2}\right)^2}$$

Ibn al-Bannā n'a pas posé de condition dans cet énoncé mais il a précisé que ce calcul approché est lié aux nombres cubes qui encadrent A .

La justification

On pose $\sqrt[3]{A} = n + u$, avec u un nombre qui vérifie $0 < u < 1$.

Ainsi, on aura $A = n^3 + 3n^2u + 3nu^2 + u^3$

Puis, en négligeant le dernier terme on aboutit à l'équation quadratique suivante

$$u^2 + nu = \frac{A - n^3}{3n} \text{ dont l'inconnue est } u.$$

²⁰⁵ - La citation intégrale d'Ibn al-Bannā est:

"وأخذ ضلع المكعب طويل العمل قليل الجدوى ولأجل هذا / تركنا أخذ ضلع المكعب. ولو كان الجذر يخرج بالجبر بغير العمل الموضوع له، ما ذكرنا تقريبيه، لأن الجذر أصل للجبر فاعلمه."

"La détermination du côté du cube est longue, et de peu d'utilité. C'est pour cette raison que nous avons abandonné (dans le Talkhīs) la détermination du côté du cube. Et si la racine carrée s'obtenait par l'algèbre, selon un procédé autre que celui qui lui a été consacré (dans le Talkhīs), nous n'aurions pas évoqué son approximation; en effet, la racine carrée est un fondement pour l'algèbre; sache-le". ABALLAGH, M. : *Rafô al-hijāb d'Ibn al-Bannā*, op. cit., p. 104.

C'est la quatrième équation dans la classification d'al-Khwārizmī dont la solution est :

$$u = \sqrt{\frac{A-n^3}{3n} + \left(\frac{n}{2}\right)^2} - \frac{n}{2}$$

D'où la formule : $\sqrt[3]{A} \approx \frac{n}{2} + \sqrt{\frac{A-n^3}{3n} + \left(\frac{n}{2}\right)^2}$.

Ibn al-Bannā n'a donné aucune indication sur la nature de la valeur obtenue par ce procédé d'approximation.

Nous pouvons vérifier qu'elle est par excès de la manière suivante :

Nous posons $\sqrt[3]{A} \approx \frac{n}{2} + \sqrt{\frac{A-n^3}{3n} + \left(\frac{n}{2}\right)^2} = n + u$ avec $u = \left[\sqrt{\frac{A-n^3}{3n} + \left(\frac{n}{2}\right)^2} - \frac{n}{2} \right]$

Puis, nous calculons $A - (n + u)^3 = A - [n^3 + 3n^2u + 3nu^2 + u^3]$

Comme u est solution de l'équation $x^2 + nx = \frac{A-n^3}{3n}$ alors $3n^2u = (A-n^3) - 3nu^2$.

Par conséquent, $A - (n + u)^3 = A - [n^3 + ((A-n^3) - 3nu^2) + 3nu^2 + u^3]$. D'où :

$$A - (n + u)^3 = -u^3 < 0$$

Et la valeur $\frac{n}{2} + \sqrt{\frac{A-n^3}{3n} + \left(\frac{n}{2}\right)^2}$ est par excès

Formule 2

$$\sqrt[3]{A} = \sqrt[3]{n^3 + r} \approx \frac{n+1}{2} + \sqrt{\left(\frac{n+1}{2}\right)^2 - \frac{(n+1)^3 - A}{3(n+1)}}$$

Comme pour la formule précédente, on ne trouve aucune condition qui accompagne l'énoncé. Aussi, nous pouvons justifier ce calcul uniquement en nous référant aux indications d'Ibn al-Bannā.

La justification

On pose $\sqrt[3]{A} = (n+1) - v$ avec $0 < v < 1$.

Ainsi, on aura $A = (n+1)^3 - 3(n+1)^2v + 3(n+1)v^2 - v^3$

Puis, en considérant $v^3 \approx 0$ on aboutit à l'équation $v^2 + \frac{(n+1)^3 - A}{3(n+1)} = (n+1)v$ dont

l'inconnue est v .

C'est la cinquième équation dans la classification d'al-Khwārizmī dont la solution est :

$$v = \left(\frac{n+1}{2}\right) - \sqrt{\left(\frac{n+1}{2}\right)^2 - \frac{(n+1)^3 - A}{3(n+1)}}$$

D'où la formule : $\sqrt[3]{A} \approx \frac{n+1}{2} + \sqrt{\left(\frac{n+1}{2}\right)^2 - \frac{(n+1)^3 - A}{3(n+1)}}$

De même que pour la formule précédente, Ibn al-Bannā n'a pas précisé que l'erreur commise par ce procédé d'approximation est par défaut. Nous pouvons le vérifier ainsi :

On pose $\sqrt[3]{A} \approx (n+1) - \left[\frac{n+1}{2} - \sqrt{\left(\frac{n+1}{2}\right)^2 - \frac{(n+1)^3 - A}{3(n+1)}} \right] = (n+1) - u$.

Puis, on calcule $[(n+1) - u]^3 - A$

$$[(n+1) - u]^3 - A = \left[(n+1)^3 - 3(n+1)^2 u + 3(n+1)u^2 - u^3 \right] - A$$

Comme u est solution de l'équation quadratique $x^2 + \frac{(n+1)^3 - A}{3(n+1)} = (n+1)x$ alors

$$3(n+1)u^2 + \left[(n+1)^2 - A \right] = 3(n+1)^2 u.$$

Ainsi, $[(n+1) - u]^3 - A = \left[(n+1)^3 - \left[3(n+1)u^2 + \left((n+1)^3 - A \right) \right] + 3(n+1)u^2 - u^3 \right] - A$ et

$$[(n+1) - u]^3 - A = -u^3 < 0.$$

Par conséquent, la valeur $\frac{n+1}{2} + \sqrt{\left(\frac{n+1}{2}\right)^2 - \frac{(n+1)^3 - A}{3(n+1)}}$ qui est attribuée à $\sqrt[3]{A}$ est par

défaut.

L'étude d'Ibn al-Bannā est trop courte et abrégée. La nature des valeurs obtenues par les deux procédés n'a pas été évoquée ainsi que l'efficacité de ce calcul. Mais, elle est spécifique dans la mesure où les nouvelles formules et le raisonnement qu'elle expose se distinguent de ceux d'Ibn Munōim. L'auteur du *Raf' al-hijāb* a utilisé des outils algébriques comme son prédécesseur et il a, en plus, introduit une nouvelle manière de négliger les puissances

supérieures d'un nombre fractionnaire plus petit que l'unité. En posant $x^3 \approx 0$ Ibn al-Bannā visait à ce que ce terme n'intervienne pas dans les équations qui découlent des deux égalités $\sqrt[3]{A} = n+x$ et $\sqrt[3]{A} = (n+1)-x$. Cette nouvelle approche a donné naissance à des formules plus simples dont l'avantage se situe au niveau de la réduction du nombre des opérations à effectuer. Ainsi qu'une diminution des divisions répétées par le terme $(3n+1)$ ou par le terme $(3(n+1)-1)$.

La comparaison des procédés d'approximation d'Ibn Munôim avec ceux d'Ibn al-Bannā montre qu'il y a une similitude entre les deux démarches. Il n'est pas facile de déterminer lequel des deux est meilleur. Sur un échantillon de nombres nous avons constaté que parfois ce sont les formules d'Ibn Munôim qui sont plus précises et parfois ce sont celles d'Ibn al-Bannā :

A	$\sqrt[3]{A}$ par calculatrice	$\sqrt[3]{A}$ Ibn Munôim	$\sqrt[3]{A}$ Ibn al-Bannā
2	1,259921	1,25	1,145497
3	1,442249	1,425390	1,263762
6	1,817120	1,819803	1,816496
7	1,912931	1,913552	1,912870
11	2,223980	2,221404	2,222474
18	2,620741	2,625	2,618033
19	2,668401	2,671785	2,666666
21	2,758924	2,760828	2,758305
26	2,962496	2,962547	2,962494
0,1	0,464158	0,466835	0,464087
0,5	0,793700	0,7937007	0,7937003
0,8	0,928317	0,928295	0,928326
34	3,239611	3,238238	3,240051
35	3,271066	3,269413	3,271690

II-3.2. Les procédés d'approximation dans certains commentaires du

Talkhīṣ et du *Rafô al-hijāb*

Les études qui ont été réalisées autour des activités mathématiques au XIV^e siècle dans l'Occident musulman ont montré que l'influence des écrits d'Ibn al-Bannā sur la production mathématique dans la période allant du XIV^e siècle jusqu'au XIX^e siècle est considérable. Leur rôle était important et fondamental dans l'enseignement aussi.

L'analyse et l'édition de certains ouvrages, conçus comme des commentaires au *Talkhīs*, montrent que leurs contenus reposent essentiellement sur les trois ouvrages d'Ibn al-Bannā déjà cités dans la section précédente. Certains commentateurs se sont référés aussi à un autre livre d'Ibn al-Bannā qui s'intitule *al-'arba' maqālāt* [Les quatre épîtres]²⁰⁶.

Dix sept commentaires ont été signalés jusqu'à présent²⁰⁷ mais quatre seulement ont été édités²⁰⁸.

Les mathématiciens du XIV^e siècle justifiaient la publication de leurs commentaires par le fait que le *Talkhīs* est un écrit qui résume des notions de calcul et d'autres d'algèbre. Son aspect jugé parfois hermétique, les a incités à le compléter, soit par des exemples soit par des démonstrations pour assurer la validité de ses énoncés et de ses procédures.

Dans le travail que nous allons présenter, nous montrerons l'influence du *Talkhīs* dans le domaine du calcul par approximation. Ainsi que l'apport important du *Raf' al-ḥijāb* même si certains commentateurs sont restés silencieux à ce propos. Nous prouverons aussi l'existence d'autres raisonnements qui ont parfois nécessité le recours à des résultats plus anciens.

Un seul commentaire du *Raf' al-ḥijāb* nous est parvenu jusqu'à présent. Il s'agit de *Tuḥfat at-tullāb wa umniyat al-ḥussāb fī sharḥ mā ashkala min Raf' al-ḥijāb* [La parure des étudiants et le souhait des calculateurs sur l'explication des difficultés du *Raf' al-ḥijāb*] d'Ibn Haydūr (m. 1413).

Parmi les mathématiciens du XIV^e siècle qui ont étudié la racine cubique d'un nombre par des procédés d'approximation, Ibn Haydūr est le seul qui a repris le raisonnement d'Ibn al-Bannā et l'a appuyé par un exemple illustrant ses étapes les plus importantes. Ce même exemple a été reproduit au XIX^e siècle par Muḥammad Ibn yūsuf Aṭfayyash dans son

²⁰⁶ - Al-Ghurbi a évoqué cet écrit dans l'étude des nombres fractionnaires. Voir HARBILI, A. : Le *Talkhīs* d'al-Ghurbī : Un commentaire inédit du *Talkhīs* d'Ibn al-Bannā. op. cit.

²⁰⁷ - ABALLAGH, M. & DJEBBAR, A. : *Ḥayāt wa mu'allafāt Ibn al-Bannā al-murrākushī* [La vie et l'œuvre d'Ibn-Bannā al-murrākushī], op. cit., pp.70-76.

²⁰⁸ - Il s'agit des publications suivantes : ABALLAGH, M. : *Raf' al-ḥijāb d'Ibn al-Bannā*, op. cit. BENTALEB, F. : *Abū l-Ḥasan al-Qalaṣādī (m.891/1486), Sharḥ Talkhīs a'omāl al-ḥisāb, Oeuvre mathématique en Espagne musulmane du XV^e siècle*, Edition et traduction, Dar al-Gharb al-islami, Tunis, non daté. GUERGOUR, Y. : *Al-A'omāl ar-riyyādiyya li Ibn Qunfudh al-Qasanṭīnī (m. 1407)* [Les écrits mathématiques d'Ibn Qunfudh al-Qasanṭīnī], Magister d'Histoire des Mathématiques, Alger, E. N. S de Kouba, 1990. HARBILI, A. : *L'enseignement des mathématiques à Tlemcen au XIV^e siècle à travers le commentaire d'al-ḌUqbānī (m.1408) au Talkhīs d'Ibn al-Bannā(m.1321)*, op. cit.

commentaire au *Kashf al-‘asrār ān ōilm ḥurūf al-ghubār* [Révélation des secrets relatifs à la science des chiffres de poussière] d’al-Qalaṣādī (m. 1486).

Les ouvrages que nous avons utilisés dans cette partie de notre travail sont : *Ḥaṭṭ an-niqāb baōda rafō al-ḥijāb ān wujūh aōmāl al-ḥisāb* [Abaissement de la voilette après le lever du voile sur les formes des opérations du calcul] d’Ibn Zakariyyā al-Gharnāṭī (m. 1413), *At-Tamḥiṣ fī sharḥ at-Talkhīṣ* [(Livre) sur la clarification sur le commentaire de l’Abrégé] et *Tuḥfat aṭ-ṭullāb wa umniyat al-ḥussāb fī sharḥ mā ashkala min Rafō al-ḥijāb* d’Ibn Haydūr et *Takhṣiṣ uwlī al-albāb fī sharḥ Talkhīṣ aōmāl al-ḥisāb* d’al-Ghurbī (XIV^e s.). Parmi les commentaires qui ont été édités, nous n’avons utilisé que celui d’al-ŌUqbānī (m. 1408) car il contient des éléments nouveaux au niveau des preuves qu’il a exposées.

II-3.2.a. Les procédés d’approximation de la racine carrée d’un nombre entier

Les procédés d’approximation de la racine carrée d’un nombre, qui ont été énoncés par les mathématiciens du XIV^e siècle, sont ceux qu’Ibn al-Bannā avait établis. Nous allons les reproduire dans cette section et signalerons les éléments nouveaux qui ont été introduits par les commentateurs.

Pour le calcul de la racine cubique d’un nombre, Ibn Zakariyyā a repris l’étude d’Ibn Munōim et Ibn Haydūr a retranscrit celle d’Ibn al-Bannā. Les autres commentateurs n’ont pas abordé ce calcul peut être parce qu’il n’a pas été évoqué dans le *Talkhīṣ*.

Nous présenterons les différents procédés d’approximation de la racine cubique d’un nombre qui ont été énoncés dans les écrits que nous avons cités. Nous ferons suivre cette présentation par un certains nombre de remarques que suggèrent l’étude comparative entre les différents textes que nous avons analysés.

II-3.2.a.1. Quelques propriétés sur les nombres carrés successifs

Ces propriétés ont été exposées comme des rappels dans les commentaires qui contiennent des démonstrations sur les procédés d’approximation.

1- Pour tout nombre non carré A il existe un entier n qui vérifie $n^2 < A < (n+1)^2$

2- Si a^2, b^2 sont deux nombres carrés consécutifs alors $|a-b|=1$

$$3- \text{ Si } a^2, b^2 \text{ sont deux nombres carrés consécutifs alors } \begin{cases} b^2 - a^2 = 2a + 1 \\ b^2 - a^2 = 2b - 1 \\ b^2 - a^2 = b + a \end{cases}$$

II-3.2.a.2. Les formules d'approximation

Formule 1

En posant $A = n^2 + r$ on a :

$$\text{Si } r \leq n \quad \text{alors} \quad \sqrt{A} \approx n + \frac{r}{2n}$$

$$\text{Si } r > n \quad \text{alors} \quad \sqrt{A} \approx n + \frac{r+1}{2n+2}$$

Tous les mathématiciens du XIV^e siècle, auteurs des ouvrages que nous avons consultés, ont énoncé cette formule d'Ibn al-Bannā. Mais, la justification du procédé n'a pas été abordée de la même manière par les commentateurs du XIV^e siècle. Certains se sont basés sur des exemples pour prouver l'efficacité du procédé et définir la nature des valeurs obtenues. Parmi-eux, al-Misrātī (m. 1344), qui était un disciple d'Ibn al-Bannā. Dans le préambule de son commentaire, il a précisé que le *Rafô al-hijāb* contient les arguments nécessaires pour compléter le *Talkhīṣ* mais qu'il manque d'exemples. C'est la raison pour laquelle il s'était proposé d'écrire son ouvrage après avoir obtenu l'autorisation de son maître²⁰⁹.

Les autres commentateurs ont eux aussi utilisé des exemples. Mais certains d'entre eux l'ont fait modérément, en privilégiant la justification de la validité des procédés. Parmi ceux qui ont justifié leur calcul, nous citons al-Ūqbānī qui a présenté des arguments qui n'utilisent pas le principe qui consiste à négliger les quantités positives plus petites que l'unité. Ibn Haydūr et Ibn Zakariyyā ont rapporté des extraits du *Rafô al-hijāb* dans leurs preuves. Le premier a, en plus, proposé un raisonnement très différent de celui d'Ibn al-Bannā. Quant au second, il a repris les preuves d'Ibn al-Bannā telle qu'elles ont été exposées dans le *Rafô al-*

²⁰⁹- Al-MISRĀTĪ : *Al-Lubāb fī talkhīṣ aḥmāl al-ḥiṣāb* [La moelle sur l'abrégé des opérations du calcul], Ms. Rabat, Al-Ḥasaniyya, n° 2186 / 2, p. 92.

hijāb. Il a aussi utilisé la méthode qu'a proposée Ibn Haydūr pour préciser la nature des valeurs obtenues par ce procédé.

Nous allons exposer la justification de chacun en indiquant les outils et les notions que ces mathématiciens du XIV^e siècle ont utilisés.

La justification d'al-ôUqbāni

Pour la première expression, al-ôUqbānī a utilisé un raisonnement identique à celui d'Ibn Munôim en précisant que l'erreur commise par ce procédé ne dépasse pas $\frac{1}{4}$.

En effet, puisque $\left(n + \frac{r}{2n}\right)^2 = A + \left(\frac{r}{2n}\right)^2$ et $r \leq n$ alors $\left(\frac{r}{2n}\right)^2 \leq \frac{1}{4}$.

Pour la deuxième expression, il a établi les résultats suivants :

1- Pour tous nombres a et b tel que $a > b$, on a $a^2 - b^2 = (a-b)^2 + 2(a-b)b$ ²¹⁰.

2- $\frac{a^2 - b^2}{2a} < (a-b)$.

Il a aussi présenté les résultats de la comparaison des erreurs commises par les deux expressions ainsi :

Si $r = n$ alors $\left(\frac{(n+1)^2 - A}{2(n+1)}\right)^2 = \frac{1}{4}$ et $\left(\frac{r}{2n}\right)^2 = \frac{1}{4}$.

Si $r < n$ alors $\left(\frac{(n+1)^2 - A}{2(n+1)}\right) = \frac{1}{2} + \frac{n-r}{2(n+1)} > \frac{1}{2}$. Mais, comme $\left(\frac{r}{2n}\right) < \frac{1}{2}$, il a

conclu que la première expression du procédé offre une meilleure précision.

Si $r > n$ alors $\left(\frac{(n+1)^2 - A}{2(n+1)}\right) = \frac{1}{2} + \frac{n-r}{2(n+1)} < \frac{1}{2}$ et $\left(\frac{r}{2n}\right) > \frac{1}{2}$. Dans ce cas,

c'est la deuxième expression qui offre une meilleure précision.

Il a également établi que :

$$n + \frac{r+1}{2n+2} = (n+1) - \frac{(n+1)^2 - A}{2(n+1)} \text{ et } \left((n+1) - \frac{(n+1)^2 - A}{2(n+1)}\right)^2 = A + \left(\frac{(n+1)^2 - A}{2(n+1)}\right)^2.$$

²¹⁰- C'est le résultat de la cinquième proposition du deuxième livre des *Eléments* d'Euclide : $E(II, 5)$. HEATH, T. : *The thirteen books of Euclid's Elements*, New York, Dover publications, Inc, 1956, vol. 1, pp. 382-385.

Sa preuve est identique à celle d'Ibn al-Bannā mais il n'a fait aucune allusion au *Rafô al-hijāb*²¹¹.

Nous signalons aussi que l'exposé d'al-ôUqbānī donne l'impression d'étudier les erreurs commises par les deux expressions d'Ibn Munôim en fonction des conditions posées par Ibn al-Bannā. Mais, le nom d'Ibn Munôim ainsi que son ouvrage n'ont pas été mentionnés dans le commentaire d'al-ôUqbānī.

La justification d'Ibn Haydūr

Ibn Haydūr a proposé de représenter géométriquement les différents objets qui interviennent dans le raisonnement d'Ibn al-Bannā.

Pour la première expression, il a représenté le nombre A par un carré : $A = (n + x)^2$.

Puis, en se référant au deuxième livre des *Eléments* d'Euclide, il a considéré que chaque terme de l'égalité $(n + x)^2 = n^2 + 2nx + x^2$ est, lui aussi, représenté par une surface.

D'où l'égalité suivante : $(A - n^2) = x(2n + x)$.

Ainsi, on aura : $x = \frac{A - n^2}{2n + x}$.

A partir de cette dernière égalité, Ibn Haydūr a proposé la valeur approchée suivante :

$x \approx \frac{A - n^2}{2n}$. Il a aussi précisé que la valeur $n + \frac{A - n^2}{2n}$ est par excès puisque

$$\frac{A - n^2}{2n + x} < \frac{A - n^2}{2n}.$$

Il a signalé que son raisonnement est basé sur la soustraction du terme x du dénominateur de la fraction $\frac{A - n^2}{2n + x}$. Il a ajouté que l'idée d'Ibn al-Bannā de soustraire le

terme x^2 n'a pas une explication dans ce type de raisonnement.

²¹¹- HARBILI, A. : *L'enseignement des mathématiques à Tlemcen à travers le commentaire d'al-ôUqbānī*, op. cit., pp. 328-334

Pour la deuxième expression, il a d'abord représenté le carré $(n+1)^2$. Puis, il a considéré que la surface carrée $A = (\sqrt{A})^2$ ajoutée au reste $(n+1)^2 - A$ est égale à la somme des surfaces : $x^2, x\sqrt{A}, x\sqrt{A}$.

Il a exprimé cette égalité de la manière suivante :

$$\left((n+1)^2 - A\right) + x^2 = 2x(\sqrt{A} + x) = 2x(n+1)$$

$$\text{D'où : } \frac{\left((n+1)^2 - A\right) + x^2}{2(n+1)} = x$$

Pour ce cas, il a proposé la valeur approchée suivante : $\frac{\left((n+1)^2 - A\right)}{2(n+1)} \approx x$ en précisant qu'elle s'obtient en soustrayant le carré du terme x du numérateur de la fraction suivante :

$$\frac{\left((n+1)^2 - A\right) + x^2}{2(n+1)}$$

Il a établi que $\frac{\left((n+1)^2 - A\right)}{2(n+1)} < \frac{\left((n+1)^2 - A\right) + x^2}{2(n+1)}$ et il a conclu que la deuxième expression du procédé offre une approximation par excès.

A cette étape de sa justification, Ibn Haydūr a évoqué l'idée d'Ibn al-Bannā d'ajouter le terme x^2 en expliquant que cette opération ne peut intervenir dans les calculs.

L'analyse du texte d'Ibn Haydūr montre que la représentation géométrique a permis à ce mathématicien du XIV^e siècle d'exposer un raisonnement différent de celui d'Ibn al-Bannā. Elle lui a surtout servi de moyen pour justifier ses critiques à propos de certains passages du *Raf' al-ḥijāb*. Nous signalons aussi que ce texte ne contient aucune indication sur une éventuelle utilisation de notions d'algèbre que nous trouvons chez Ibn al-Bannā comme la notion d'équation algébrique et celle des monômes x et x^2 .

Formule 2

En posant $r = (n+1)^2 - A$, on a :

$$\begin{aligned} \text{Si } r \leq (n+1) & \quad \text{alors} \quad \sqrt{A} \approx (n+1) - \frac{r}{2(n+1)} \\ \text{Si } r > (n+1) & \quad \text{alors} \quad \sqrt{A} \approx (n+1) - \frac{r-1}{2(n+1)-2} \end{aligned}$$

Parmi les commentateurs du *Talkhīṣ* dont les ouvrages nous sont parvenus, seul al-Ghurbī (XIV^e s.) a énoncé cette formule.

Il a rassemblé dans cette formule les résultats de l'étude d'Ibn al-Bannā mais il n'a fait aucune référence au *Raf' al-ḥijāb*. Il a plutôt déclaré que ce procédé n'a pas été évoqué par Ibn al-Bannā en faisant vraisemblablement allusion au *Talkhīṣ*.

Al-Ghurbī n'a pas proposé de preuve mais il a conclu à partir des exemples, qu'il a traités, que l'erreur commise par ce procédé est par excès²¹².

Cette formule n'a pas été énoncée dans les ouvrages du XIV^e siècle qui sont accessibles aujourd'hui. Aussi il est naturel de s'interroger sur la survivance de ce type de calcul dans la tradition mathématique ultérieure de l'Occident musulman.

Formule 3

$$\text{Si } A - n^2 = n \text{ alors } (n+1)^2 - A = (n+1) \text{ et } \sqrt{A} \approx \frac{n(n+1)}{2}$$

Ce cas a été distingué par Ibn Zakariyyā et Ibn Haydūr. Ils ont tous les deux évoqué la notion de proportionnalité de A avec les nombres carrés qui l'encadrent. Ibn Zakariyyā a répété ce qu'a dit Ibn al-Bannā à propos de la valeur de A . Ibn Haydūr a présenté la formule pour la valeur de $A = n(n+1)$ à travers un exemple.

Formule 4

$$\sqrt{A} = \sqrt{n^2 + r} \approx x_1 - \frac{(x_1)^2 - A}{2x_1}$$

x_1 étant la première valeur approchée du nombre irrationnel \sqrt{A} obtenue par les formules précédentes.

Dans tous les écrits que nous avons consultés, cette formule a été énoncée suivie d'un certain nombre d'exemples. Plusieurs commentateurs, comme al-ḥUqbānī, ont répété le procédé jusqu'à $n = 3$ et ont déclaré qu'il est possible de poursuivre l'itération indéfiniment²¹³. Ibn Haydūr l'a certifié en utilisant l'expression de « *procédé qui ne s'arrête pas* »²¹⁴.

²¹²- AL-GHURBĪ, *Takhṣīs uwlī l-albāb fī sharḥ talkhīṣ aḥmāl al-ḥisāb* [Spécialisation des hommes de cœur dans le commentaire de l'abrégé des opérations du calcul], Ms. Alger, B.N, n° 2712, ff. 101b-102b.

²¹³- HARBILI, A. : *L'enseignement des mathématiques à Tlemcen à travers le commentaire d'al-ḥUqbānī*, op. cit., pp. 334-336.

²¹⁴- IBN HAYDŪR : *At-Tamḥīṣ fī sharḥ at-Talkhīṣ*, Ms. Rabat, Al-Ḥasaniyya, n°252, ff. 32.

Aucun mathématicien à la suite d'Ibn al-Bannā n'a tenté de prouver la validité de ce procédé d'approximation. Quant à sa précision, elle a été constatée à travers des exemples seulement.

La terminologie qui a été utilisée nous permet de généraliser ce procédé d'approximation de la manière suivante :

On pose x_1 la première valeur approchée du nombre irrationnel \sqrt{A} obtenue en appliquant une des formules précédentes selon les cas. A partir de cette valeur nous calculons celles qui suivent en utilisant la formule récurrente suivante :

$$\begin{cases} x_1 \\ x_n = x_{n-1} - \frac{(x_{n-1})^2 - A}{2x_{n-1}} \end{cases}$$

C'est la méthode itérative qui consiste à disposer d'une approximation initiale $x_0 = \lfloor \sqrt{A} \rfloor$ ou bien $x_0 = (\lfloor \sqrt{A} \rfloor + 1)$ de la solution recherchée²¹⁵.

Puis, en calculant le premier terme x_1 de cette suite selon la formule 1 on calcule l'erreur commise par excès. Sa valeur est égale à $e_1 = \left(\frac{A - n^2}{2n} \right)^2$ lorsque $x_0 = \lfloor \sqrt{A} \rfloor$ et à

$$e_1 = \left(\frac{(n+1)^2 - A}{2(n+1)} \right)^2 \text{ lorsque } x_0 = (\lfloor \sqrt{A} \rfloor + 1).$$

Le calcul des termes suivants permet de réduire cette erreur d'une manière progressive jusqu'à la rendre très faible. Les mathématiciens maghrébins du XIV^e siècle ont établi ce résultat à travers des exemples. C'est sûrement la raison pour laquelle ils ont maintenu l'appellation « *affinement des approximations* ».

La suite est minorée par le nombre \sqrt{A} . Ce résultat a été vérifié par les mathématiciens du XIV^e siècle.

Effectivement, sachant que $x_1 > \sqrt{A}$ et $A > 1$ nous pouvons vérifier que $x_n > \sqrt{A}$ pour tout $n \geq 2$.

La suite $(x_n)_n$ est décroissante. Par suite, elle est convergente.

²¹⁵ - $\lfloor \sqrt{A} \rfloor = n$ désigne la partie entière du nombre irrationnel \sqrt{A} qui vérifie aussi $n^2 < A < (n+1)^2$.

Formule 5

$$\sqrt{A} = \frac{\sqrt{A.b^2}}{b}$$

Cette formule a fait l'objet de quelques commentaires de la part de certains mathématiciens du XIV^e siècle comme al-ôUqbānī. Ce dernier a déclaré que l'on peut obtenir un résultat meilleur avec un bon choix de b^2 . Mais, il s'est servi d'un exemple pour préciser qu'il n'est pas toujours obligatoire qu'on attribue à b^2 une valeur très grande²¹⁶. Quant à Ibn Haydūr, il a déclaré que la valeur obtenue est moins précise lorsque $b^2 < A$.

Nous avons déjà signalé l'efficacité de ce procédé mais, comme Ibn al-Bannā, la majorité des mathématiciens du XIV^e siècle ne l'ont pas considéré comme un moyen qui affine l'approximation.

Al-ôUqbānī, Ibn Haydūr et Ibn Zakariyyā ont utilisé le résultat suivant : $\sqrt{a.b} = \sqrt{a} . \sqrt{b}$ pour justifier le procédé ainsi : $\frac{\sqrt{Ab^2}}{b} = \frac{\sqrt{A} \sqrt{b^2}}{b} = \sqrt{A}$

Al-ôUqbānī a, en plus, démontré que l'erreur commise est par excès²¹⁷. Al-Ghurbī et Ibn Zakariyyā l'ont constaté mais à travers des exemples.

Formule 6

$$\sqrt{A} \approx \begin{cases} n + \frac{A-n^2}{(n+1)^2 - n^2} \\ \text{ou bien} \\ (n+1) - \frac{(n+1)^2 - A}{(n+1)^2 - n^2} \end{cases}$$

Ce procédé d'approximation a été énoncé par Ibn Zakariyyā. Les autres commentateurs ne l'ont pas cités dans leurs écrits peut être parce qu'Ibn al-Bannā ne l'a pas évoqué.

²¹⁶- Al-ôUqbānī a prouvé, à travers un exemple, que le choix de b assez grand ne garantit pas toujours une minimisation de l'erreur commise par ce procédé. Pour cela, il s'est proposé de calculer $\sqrt{6}$ en choisissant d'abord $b=9$. Il a trouvé l'erreur commise : $e_1 = \frac{25}{1664}$. Puis, pour $b=4$, il a trouvé une erreur $e_2 = \frac{1}{400}$. Ensuite, il a établi que $e_1 > e_2$. Voir HARBILI, A. : *L'enseignement des mathématiques à Tlemcen à travers le commentaire d'al-ôUqbānī*, op. cit., pp. 338-342.

²¹⁷- HARBILI, A. : *L'enseignement des mathématiques à Tlemcen à travers le commentaire d'al-ôUqbānī (m. 1408)*, op. cit., pp. 130-131.

Les mathématiciens de l'Occident musulman comme Ibn Munôim, al-Ḥaṣṣār et Ibn al-Yāsamīn ne l'ont pas énoncé aussi. Mais, au X^e siècle, Ibn ôAbdūn a utilisé la première expression de cette formule dans son épître *Risāla fī t-taksīr*. Il ne l'a pas énoncée explicitement mais il l'a appliquée conjointement avec la première expression de la formule 1 pour calculer la racine carrée de certains nombres, qui ne sont pas des carrés parfaits²¹⁸.

Cette formule présente quelques particularités : Les termes qui sont utilisés dans l'énoncé de la première expression sont ceux exprimant le procédé d'approximation connu en Orient musulman.

La deuxième expression n'a pas été citée dans les ouvrages de calcul que nous avons consultés dans les deux traditions de l'Orient et de l'Occident musulmans. Il est probable qu'elle a été énoncée dans des ouvrages plus anciens d'al-Andalus. Il est possible aussi qu'Ibn Zakariyyā se soit inspiré de l'étude d'Ibn al-Bannā pour exprimer le même procédé avec deux formulations différentes. Nous pouvons effectivement établir l'égalité entre les deux expressions de la manière suivante :

$$(n+1) - \frac{(n+1)^2 - A}{(n+1)^2 - n^2} = n + \left(1 - \frac{(n+1)^2 - A}{(n+1)^2 - n^2} \right) = n + \frac{A - n^2}{(n+1)^2 - n^2}.$$

L'erreur commise par ce procédé est par défaut contrairement aux autres procédés que nous avons exposés jusqu'à présent. Mais Ibn Zakariyyā n'a fait aucune allusion à cette particularité.

Formule 7

$$\sqrt{A} \approx \frac{\sqrt{Ab^2 - 1}}{b}$$

C'est le procédé d'approximation qui a été énoncé par Ibn Zakariyyā sans aucune indication sur son origine ou sa validité. De plus, aucun exemple n'a été utilisé pour expliciter les étapes de ce calcul.

Ibn Zakariyyā a signalé que le choix de b^2 très grand assure la précision du résultat.

Concernant la nature de l'erreur commise par ce procédé, nous pouvons vérifier que :

²¹⁸ - DJEBBAR, A. : *Ar-Risāla fī t-taksīr li Ibn ôAbdūn, shāhid ôalā al-mumārasāt as-sābiqa li t-taqlīd al-jabrī al-ôrabī* [L'épître sur le mesurage d'Ibn ôAbdūn, un témoin des pratiques antérieures à la tradition algébrique arabe], *Suhayl, Journal for the History of the Exact and Natural Sciences in Islamic Civilisation*, Barcelone, 2005, Volume 5, partie arabe, pp. 7-68.

1- Si $(Ab^2 - 1)$ est un carré parfait elle sera par défaut.

Effectivement, si on pose : $\frac{\sqrt{Ab^2 - 1}}{b} = \frac{u}{b}$, avec $u^2 = Ab^2 - 1$.

On déduit que $\frac{u^2}{b^2} = \frac{Ab^2 - 1}{b^2} = A - \frac{1}{b^2}$

Par conséquent $\frac{u^2}{b^2} < A$.

2- Si $(Ab^2 - 1)$ n'est pas un carré parfait.

On pose u_1 la valeur approchée du nombre irrationnel $(\sqrt{Ab^2 - 1})$, calculée en appliquant les procédés d'approximation déjà cités à l'exception de la formule 6.

Dans ce cas : $(u_1)^2 > (Ab^2 - 1)$ car u_1 est une valeur approchée par excès.

Or, $\frac{\sqrt{Ab^2 - 1}}{b} < \frac{\sqrt{Ab^2}}{b}$

Par conséquent, la nature de l'erreur dépend de la valeur de b . Nous pouvons le constater à travers l'exemple suivant :

Pour $A = 2$, choisissons d'abord $b = 2$:

$$\frac{\sqrt{2 \cdot 4 - 1}}{2} = \frac{\sqrt{7}}{2} \approx \frac{2 + \frac{2}{3}}{2} = 1 + \frac{1}{3}$$

Avec $\left(1 + \frac{1}{3}\right)^2 - 2 < 0$. La valeur trouvée est par défaut.

Pour $b = 4$ nous avons :

$$\frac{\sqrt{2 \cdot 16 - 1}}{4} = \frac{\sqrt{31}}{4} \approx \frac{5 + \frac{7}{12}}{4} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{7}{12}$$

Dans ce cas : $\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{7}{12}\right)^2 - 2 > 0$. La valeur trouvée est par excès.

3- Si $(Ab^2 - 1)$ n'est pas un carré parfait et u_1 est la valeur approchée du nombre irrationnel $(\sqrt{Ab^2 - 1})$, calculée en appliquant la formule 6.

Dans ce cas : $u_1^2 < Ab^2 - 1 < Ab^2$. Par conséquent la valeur $\frac{u_1}{b}$ est par défaut.

Justification du procédé

L'interprétation que nous pouvons donner à la formulation de ce procédé est la suivante :

$$\text{On pose } \frac{\sqrt{Ab^2 - 1}}{b} = \sqrt{A - \frac{1}{b^2}}.$$

On peut considérer $\left(\frac{1}{b^2}\right) \approx 0$ pour b^2 assez grand

$$\text{D'où le résultat } \frac{\sqrt{Ab^2 - 1}}{b} \approx \sqrt{A}$$

II-3.2.b. Les procédés d'approximation de la racine carrée d'une fraction

Les mathématiciens du XIV^e siècle ont énoncé les formules d'Ibn al-Bannā et ont utilisé des exemples pour mieux expliquer les procédés de calcul. Ils ont distingué le cas où le numérateur et le dénominateur de la fraction sont des carrés parfaits. Ils ont aussi précisé que dans le cas contraire le calcul se fait en appliquant les procédés d'approximation consacrés aux entiers. Ils ont aussi évoqué l'égalité $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \sqrt{b}$ pour justifier la formule d'Ibn al-Bannā.

En ce qui concerne ce dernier cas, al-ôUqbānī a démontré les résultats suivants :

Résultats

1- Si deux nombres ne sont pas des carrés leur produit peut être un carré.

2- Si deux nombres sont tel que l'un d'eux est un carré l'autre n'est pas un carré leur produit n'est pas un carré.

3- Le rapport de deux nombres, dont l'un seulement est un carré, n'est pas un carré.

4- Si le numérateur et le dénominateur d'une fraction $\frac{a}{b}$ ne sont pas des carrés parfaits

alors deux cas sont possibles :

a- Si $(a.b)$ est un carré alors $\sqrt{\frac{a}{b}}$ est rationnel.

b- Si $(a.b)$ n'est pas un carré alors $\sqrt{\frac{a}{b}}$ est irrationnel.

Si a est un carré et b n'est pas un carré (resp, a n'est pas un carré et b est un carré) alors $\sqrt{\frac{a}{b}}$ est irrationnel.

Les cas de l'irrationalité de \sqrt{a} et de \sqrt{b} ont été exposés par al-Ghurbī aussi.

II-3.2.c. Les procédés d'approximation de la racine cubique d'un nombre entier

Parmi les commentateurs du *Talkhīs* dont les écrits nous sont parvenus, seul Ibn Zakariyyā a abordé le calcul de la racine cubique d'un nombre par des méthodes d'approximation. Son étude contient des éléments nouveaux par rapport à ce qu'on a déjà exposé. Ibn Haydūr a lui aussi exposé des formules d'approximation de la racine cubique d'un nombre dans son commentaire au *Rafō al-ḥijāb* qu'il a intitulé *Tuḥfat aṭ-ṭullāb wa umniyat al-ḥussāb fī sharḥ mā ashkala min Rafō al-ḥijāb* [La parure des étudiants et le souhait des calculateurs sur l'explication des difficultés du Rafō al-ḥijāb].

Nous n'allons pas reproduire les formules que nous avons présentées dans les sections précédentes. Mais, nous exposerons les résultats de notre analyse du texte d'Ibn Zakariyyā et de celui d'Ibn Haydūr. Puis, nous présenterons les nouveaux procédés qu'Ibn Zakariyyā a énoncés.

a- Quelques remarques sur l'étude d'Ibn Zakariyyā

Dans son commentaire au *Talkhīs*, Ibn Zakariyyā a repris les deux formules d'Ibn Munōim et a reproduit ses exemples. Mais, il a énoncé la première avec la condition $A - n^3 \leq (n+1)^3 - A$ et la deuxième avec la condition $A - n^3 > (n+1)^3 - A$.

Il a aussi proposé une méthode pour connaître le cube le plus proche d'un nombre. Nous la présentons ainsi :

Soient A , n et v des nombres entiers qui vérifient $n^3 < A < (n+1)^3$ et $v = \frac{((n+1)^3 - n^3) - 1}{2}$:

Si $A - n^3 \leq v$ alors $(A - n^3) < ((n+1)^3 - A)$

Si $A - n^3 \geq v$ alors $(A - n^3) > ((n+1)^3 - A)$

Pour calculer $\sqrt[3]{42}$, il a utilisé la deuxième formule alors que le nombre 42 est plus proche de 3^3 puisque $v = \frac{4^3 - 3^2 - 1}{2} = 18$ et $42 - 3^3 = 15$. Il s'est exprimé ainsi « ...*Exemple de cela, si on te disait quarante-deux quel est son cube. Tu trouves [que] le cube le plus*

proche de 42 est plus grand [c'est] 64 ». Ainsi, Ibn Zakariyyā n'a pas appliqué les procédés selon les conditions qu'il a posées mais il a répété les calculs d'Ibn Munōim.

Pour justifier la première formule, il a fait référence au *Fiqh al-hisāb* d'Ibn Munōim et au dernier chapitre du *Kāmil* d'al-Ḥaṣṣār mais il n'a pas donné des indications sur la démonstration de chacun. Il a aussi signalé que les deux formules ont été justifiées par ʾAbd al-Ḥaqq Ibn Ṭāhir.

b- Une remarque sur l'étude d'Ibn Haydūr

Ibn Haydūr a énoncé les deux formules d'Ibn al-Bannā dans son commentaire au *Rafʾ al-hijāb*. Il a aussi repris son raisonnement mais il n'a donné aucune justification.

Quant à la notion qui consiste à négliger les quantités positives plus petites que l'unité, elle a été explicitée à travers l'exemple suivant : $\sqrt[3]{10}$, ainsi que les autres étapes de ce calcul.

Formule 1

$$\sqrt[3]{A} = \frac{\sqrt[3]{Ab^3}}{b} \quad \text{ou bien} \quad \sqrt[3]{A} \approx \frac{\left[\sqrt[3]{Ab^3} \right]}{b}$$

Ces deux formules ont été énoncées par Ibn Zakariyya dans le but d'affiner l'approximation obtenue en appliquant les formules d'Ibn Munōim.

Aucun mathématicien de l'Occident dont les écrits nous sont parvenus n'a évoqué ces formules. Concernant la première expression, Ibn Zakariyyā a précisé que sa formulation est semblable à celle de l'approximation de la racine carrée qui est : $\sqrt{A} = \frac{\sqrt{Ab^2}}{b}$.

Mais, pour la deuxième expression nous n'avons pas trouvé dans les textes que nous avons analysés l'idée d'attribuer au numérateur le nombre $\left[\sqrt[3]{Ab^3} \right]$, obtenu par l'algorithme d'extraction de la racine cubique. Par contre, ce principe a été utilisé par les mathématiciens de l'Orient musulman.

Ibn Zakariyyā a aussi certifié que les résultats obtenus par ce calcul sont plus précis si b est choisi très grand mais il n'a pas donné de preuve.

Nous signalons que la valeur obtenue par la deuxième expression est par défaut car :

$$\left[\sqrt[3]{Ab^3} \right] < \sqrt[3]{Ab^3}.$$

Pour la première expression, la nature de la valeur dépend de la formule utilisée pour le calcul du numérateur.

II-3.2.d. Les procédés d'approximation de la racine cubique d'une fraction

Formule 1

Si a et b sont des cubes parfaits alors $\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$

Si a et b ne sont pas des cubes parfaits alors $\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a \cdot b^2}}{b}$

Ibn Zakariyya a énoncé les deux expressions et a signalé qu'elles sont semblables aux formules d'approximation de la racine carrée d'une fraction.

Au début de son exposé, il a précisé que la première expression s'applique aussi dans le cas où a et b ne sont pas des cubes parfaits. Mais, dans les exemples qu'il a traités, il a bien distingué les différents cas.

Il a, également, précisé que la preuve du procédé est évidente. En effet,

$$\frac{\sqrt[3]{ab^2}}{b} = \frac{\sqrt[3]{ab^2}}{\sqrt[3]{b^3}} = \sqrt[3]{\frac{ab^2}{b^3}} = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}$$

II-4. Les procédés d'approximation dans certains ouvrages du XIV^e, XV^e et XIX^e siècles

Dans cette section, nous allons nous intéresser aux procédés d'approximation qui ont été énoncés dans des ouvrages qui ne sont pas des commentaires aux écrits d'Ibn al-Bannā et qui nous sont parvenus.

Le premier a été rédigé au XIV^e siècle par al-Qaṭrawānī et s'intitule *Rashf ar-ruḍāb min thughūr aḥmāl al-ḥisāb* [Succion du nectar des bouches des opérations du calcul]. Des études récentes ont signalé l'importance de cet écrit qui réside particulièrement dans un de ses grands chapitres qui est consacré aux polynômes.

Yaḥyā Ibn Ibrāhīm al-Amawī al-Andalusī (XIV^e s.) a consacré une section de son ouvrage intitulé *Marāsim al-intisāb fī maḥālim al-ḥisāb* [Les honneurs de l'affiliation sur les

signes du calcul] au calcul de la racine carrée et de la racine cubique d'un nombre. Les formules qu'il a proposées se distinguent de celles connues en Orient musulman. Certaines sont celles qui sont connues en Occident. Les autres pourraient être issues du raisonnement qui a été établi par Ibn al-Bannā.

Le troisième ouvrage que nous évoquons dans cette section a été écrit au XV^e siècle par al-Qalaṣādī (m. 1486) et qui est intitulé *Ghunyaṭ dhawī l-albāb*.

Dans cet ouvrage, al-Qalaṣādī a exposé les formules d'approximation d'Ibn al-Bannā en utilisant une terminologie différente.

Le quatrième ouvrage, que nous avons utilisé dans notre étude, a été rédigé au XIX^e siècle par Muḥammad Ibn Yūsuf aṭ-Ṭfayyesh. Il est intitulé *Sharḥ al-Qalaṣādī* [Commentaire (au livre) d'al-Qalaṣādī]. L'auteur a précisé que le titre de l'ouvrage d'al-Qalaṣādī, qui a fait l'objet de son étude, est *Kashf al-‘aṣrār ān ōilm ḥurūf al-ghubār* [Révélation des secrets relatifs à la science des chiffres de poussière]. Il a aussi signalé qu'il existe plusieurs titres d'ouvrages qui sont attribués à al-Qalaṣādī comme *Kashf al-jilbāb ān ōilm al-ḥisāb* [Le dévoilement de la tunique de la science du calcul].

Dans cette section, nous allons présenter les procédés d'approximation contenus dans ces ouvrages en commentant la terminologie utilisée.

II-4.1. Les formules d'approximation de la racine carrée d'un nombre entier

Soit A le nombre dont on cherche la racine : $A = n^2 + r$.

Formule 1

$$\begin{array}{ll} \text{Si } r \leq n & \text{alors } \sqrt{A} \approx n + \frac{r}{2n} \\ \text{Si } r > n & \text{alors } \sqrt{A} \approx n + \frac{\min((r+1), (2n+2))}{\max((r+1), (2n+2))} \end{array}$$

Cette formule exprime le procédé qui a été exposé dans le *Talkhīṣ* d'Ibn al-Bannā. Elle a été énoncée dans les ouvrages que nous avons cités excepté celui d'al-Amawī. Les auteurs de ces écrits n'ont pas précisé l'origine du procédé. Nous signalons aussi que dans son commentaire au *Talkhīṣ*, al-Qalaṣādī n'a pas utilisé cette formulation.

Al-Misrātī a évoqué cette terminologie²¹⁹ ainsi qu'Ibn Zakariyyā. Ce dernier a précisé que le dénominateur du rapport est toujours égal au double de la racine exacte augmenté de un. Cette précision peut être explicitée ainsi :

$$\begin{cases} \sqrt{A} \approx n + \frac{r+1}{2n+2} & \text{si } r+1 < 2n+2 \\ \sqrt{A} \approx n + \frac{2n+2}{r+1} & \text{si } r+1 > 2n+2 \end{cases}$$

Si $r+1 > 2n+2$ alors $r > 2n+1$ et $A > (n+1)^2$.

Mais, comme $n^2 < A < (n+1)^2$ alors la seule expression envisageable est $\sqrt{A} \approx n + \frac{r+1}{2n+2}$.

L'absence de cette terminologie dans les autres écrits maghrébins du XIV^e siècle nous permet de supposer qu'elle a peut être été utilisée dans la tradition d'al-Andalus. En tout cas, il est certain qu'elle a été transmise au mathématicien du XIX^e siècle Muḥammad Ibn yūsuf aṭ-Ṭfayyash par al-Qalaṣādī. Cependant, nous ne savons pas expliquer la présence de cette formulation dans l'écrit d'al-Qaṭrawānī.

Aṭ-Ṭfayyash a repris l'étude d'Ibn al-Bannā avec ses preuves et ses remarques. Il a aussi exposé l'énoncé de la formule 2 de la section précédente qui a été énoncée par al-Ghurbī.

En Orient, nous avons déjà signalé qu'au XIV^e siècle Ibn al-Majdī a utilisé le procédé d'approximation d'Ibn al-Bannā. Mais, Ya'īsh Ibn Ibrāhīm al-Amawī a repris l'énoncé des deux formules qu'Ibn Mun'īm, al-Ḥaṣṣār et Ibn al-Yāsamīn ont exposées dans leurs ouvrages. Il a aussi formulé celui d'Ibn al-Bannā mais d'une manière plus simplifiée en s'exprimant ainsi « *Et lorsque le numérateur de la fraction [c'est à dire $(A - n^2)$], dans le cas où le carré le plus proche de A est n^2 , est supérieur ou égale à la moitié de son dénominateur [c'est-à-dire n] alors rajoute un au numérateur et deux au dénominateur ce que tu obtiens est la racine* »²²⁰.

²¹⁹- AL-MISRĀTĪ : *Al-Lubāb fī talkhīṣ a'omāl al-ḥisāb*, op. cit., p. 163.

²²⁰- AL-AMAWĪ : *Marāsim al-intisāb*, op. cit., p. 54.

Al-Amawī n'a pas donné des précisions sur les deux procédés. Il n'a pas aussi utilisé des exemples pour les expliciter²²¹.

Formule 2

Si n^2 , m^2 sont deux nombres carrés tel que $An^2 = m^2 + 1$ ou bien $An^2 = m^2 - 1$ alors :

$$\sqrt{A} \approx \frac{An^2 + m^2}{2nm}$$

Cette formule a été énoncée par al-Qaṭrawānī (XIV^e s.) qui n'a donné aucune indication sur son origine. Il a, seulement, précisé que l'erreur commise vaut exactement $e = \frac{1}{2^2 n^2 m^2}$ mais sans le prouver.

Aucun ouvrage parmi ceux que nous avons consultés ne contient ce type de procédé d'approximation.

La nature de l'erreur peut être déterminée comme suit :

$$\sqrt{A} \approx \frac{An^2 + m^2}{2nm} \quad \text{avec} \quad An^2 = m^2 \pm 1$$

$$\text{C'est-à-dire :} \quad \left(\frac{An^2 + m^2}{2nm} \right)^2 = \begin{cases} \left(\frac{2m^2 + 1}{2mn} \right)^2 & \text{si } An^2 = m^2 + 1 \\ \left(\frac{2m^2 - 1}{2mn} \right)^2 & \text{si } An^2 = m^2 - 1 \end{cases}$$

$$\text{D'où} \quad \left(\frac{2m^2 \pm 1}{2mn} \right)^2 = \frac{4m^4 \pm 4m^2 + 1}{2^2 m^2 n^2} = \frac{4m^2(m^2 \pm 1)}{4m^2 n^2} + \frac{1}{2^2 m^2 n^2} = A + \frac{1}{2^2 m^2 n^2}.$$

L'erreur commise est alors par excès et vaut $e = \frac{1}{2^2 n^2 m^2}$ comme l'a précisé al-Qaṭrawānī.

Pour expliciter les étapes de ce procédé d'approximation, al-Qaṭrawānī s'est proposé de calculer $\sqrt{3}$. Dans ses calculs, il a utilisé des termes bien précis pour désigner le numérateur et le dénominateur de la fraction. Il s'est exprimé comme suit : « ...ceci est [la valeur]

²²¹ - Dans son édition, Saidan a signalé que ces procédés sont différents de ceux connus en Orient mais il n'a fait aucun lien avec la tradition de l'Occident musulman. Voir AL-AMAWĪ : *Marāsim al-intisāb*, op. cit., pp. 94-95.

améliorée d'après notre terminologie et tu peux l'appeler comme tu veux » pour indiquer le numérateur de la fraction. Il a ajouté «...et ceci est l'origine d'après notre terminologie aussi » pour désigner le dénominateur²²².

L'analyse du texte permet d'identifier la notion de la moyenne si on écrit le rapport comme suit $\frac{An^2+m^2}{2nm} = \frac{1}{2} \left(\frac{An}{m} + \frac{m}{n} \right)$. Puis, en posant $\sqrt{A} \approx \frac{m}{n}$, qui est la valeur approchée obtenue par une des formules précédentes, nous pouvons déduire que $\frac{An^2+m^2}{2nm} \approx \frac{1}{2} \left(\sqrt{A} + \frac{m}{n} \right)$ en utilisant d'autres résultats comme $\sqrt{\frac{1}{A}} = \frac{1}{\sqrt{A}} \approx \frac{n}{m}$, dont l'usage est fréquent dans les textes que nous avons analysés. Ainsi l'appellation de moyenne²²³ serait attribuée au rapport entier $\frac{An^2+m^2}{2nm}$.

Il est possible aussi de traduire le mot *al-mu'addal* qu' al-Qaṭrawānī a utilisé par « (la valeur ou le terme) corrigé » ou « (la valeur ou le terme) rectifié » ou même « (la valeur) améliorée (du nombre \sqrt{A}) »²²⁴ car d'après les calculs d'al-Qaṭrawānī le principe du procédé repose sur la fraction $\frac{m}{n}$, obtenue par un des procédés d'approximations.

L'élément qui pourrait confirmer cette lecture est la signification du mot « *al-aṣl* », utilisé aussi par al-Qaṭrawānī pour nommer le dénominateur. Cette appellation traduit bien le sens d'origine, qui pourrait être attribué à la fraction initiale $\frac{m}{n}$. Il n'y a aucune autre indication qui pourrait aider à connaître l'origine de ce procédé ou à le justifier. Nous avons vérifié la concordance entre la terminologie d'al-Qaṭrawānī et notre interprétation sur des exemples comme $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$ Mais, on ne peut pas le vérifier dans le cas général.

En effet, pour la formule suivante $\sqrt{n^2+r} \approx n + \frac{r}{2n} = \frac{2n^2+r}{2n}$, nous avons :

$$(n^2+r)(4n^2) = (2n^2+r)^2 - r^2. \text{ Ainsi, pour que la condition soit satisfaite il faut poser } r = 1.$$

²²²- Les deux expressions d'al-Qaṭrawānī sont : « *hādha huwa al-mu'addal iṣṭilāḥan minnā wa laka an tusammih kayfa shi't* » et « *wa hādha al-aṣl iṣṭilāḥan minnā ayḍan* » .

²²³- Le terme « *al-mu'addal* » a été traduit par « *moyenne* » dans l'étude de D. Lamrabet. Voir LAMRABET, D. : *Les mathématiques maghrébines au Moyen-âge, Traduction de manuscrits inédits. Motivations pédagogiques de leur étude actuelle*, Mémoire de post-graduat en didactique des mathématiques, Bruxelles, Université libre de Bruxelles, 1981, p. 57bis.

²²⁴- Cette explication est fondée sur l'exemple, qui a été traité par al-Qaṭrawānī.

Par conséquent, le procédé s'appliquerait pour tous nombre A qui s'écrit $A=n^2+1$.

Pour la formule $\sqrt{n^2+r} \approx n + \frac{r+1}{2n+2} = \frac{2n^2+2n+r+1}{2n+2}$, nous avons :

$$(n^2+r)(2n+2)^2 = 4n^4 + 8n^3 + 4n^2 + 4rn^2 + 8nr + 4r$$

$$(2n^2+2n+r+1)^2 = 4n^4 + 8n^3 + 4n^2 + 4n^2r + 4n^2 + 4nr + 4n + (r+1)^2$$

Par conséquent, le procédé s'appliquerait pour tout nombre $A=n^2+r$ qui vérifie $A(2n+2)^2 = (2n^2+2n+r+1)^2 \pm 1$ c'est-à-dire $(r-n)(4n+4) = (r+1)^2 \pm 1$ avec $r > n$.

Nous signalons qu'al-Qaṭrawānī a précisé qu'il est possible d'affiner l'approximation en choisissant des nombres carrés n^2, m^2 très grands. Il n'a pas indiqué la manière de les trouver mais il a montré à travers le seul exemple qu'il a traité, $\sqrt{3}$, comment ce choix pourrait donner une meilleure précision.

Il est très probable qu'il ait procédé à des tests pour déterminer les nombres carrés qu'il a proposés.

A cela, nous ajoutons qu'il n'est pas facile de déterminer les nombres carrés n^2 et m^2 lorsque le nombre A est très grand.

Nous concluons que ce type d'approximation était connu à l'époque d'al-Qaṭrawānī. L'absence d'une méthode générale pour déterminer les nombres m et n aurait peut être été la raison pour laquelle il n'a pas été énoncé dans les ouvrages du XIV^e siècle qui sont aujourd'hui accessibles.

II-4.2. Les formules d'approximation de la racine carrée d'une fraction

Formule

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a.c}}{m'} \approx \frac{c'}{m'}$$

$$\text{avec } c.b = m'^2 \text{ et } c' \approx \sqrt{a.c}$$

Cette formule a été énoncée par al-Qaṭrawānī qui a précisé que le choix du nombre c est tel que $(c.b)$ soit un carré.

Il a aussi énoncé d'autres formules et a présenté des exemples pour distinguer les cas de l'irrationalité du numérateur et du dénominateur. La même présentation a été donnée par al-Qalaṣādī et aṭ-Ṭfayyash.

Al-Qaṭrawānī a aussi exposé la formule qu'Ibn Munōim avait énoncée ainsi : $\sqrt{A} = \frac{\sqrt{Ab^2}}{b}$. Il a aussi précisé que si le carré par lequel on multiplie la fraction est grand alors la valeur, calculée par cette formule, sera plus précise.

II-3.3. Les formules d'approximation de la racine cubique d'un nombre entier

Al-Qaṭrawānī a énoncé les formules d'Ibn Munōim et il les a appliqué pour calculer $\sqrt[3]{50}$. Il a utilisé la terminologie suivante pour les dénominateurs des fractions et les rapports qui interviennent dans les deux expressions :

$(3n+1)$ et $3(n+1)-1$ sont appelés *les dénominateurs*²²⁵.

$\frac{A-n^3}{3n+1}$ et $\frac{(n+1)^3-A}{3(n+1)-1}$ sont appelés *les racines*.

$\frac{3n^2}{3n+1}$ et $\frac{3(n+1)^2}{3(n+1)-1}$ sont appelés *l'excès*.

Nous n'avons aucune idée sur l'origine de cette terminologie ni Ibn Munōim ni Ibn Zakariyyā ne l'ont signalée. De plus, aucun indice n'a été donné par al-Qaṭrawānī pour expliquer le choix de cette appellation. Seul le terme al-'imām coïncide avec sa nature de dénominateur. Mais sachant qu'al-Qaṭrawānī est d'origine égyptienne, cette terminologie pourrait être rattachée aux pratiques calculatoires du Caire, au XIV^e siècle.

Les résultats des calculs d'al-Qaṭrawānī sont :

$\sqrt[3]{50} \approx 3 + \frac{6}{10} + \frac{6}{8} \left(\frac{1}{10} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{8} \left(\frac{1}{10} \right) \right)$, en appliquant la première formule. Il a ensuite trouvé :

$$\left[3 + \frac{6}{10} + \frac{6}{8} \left(\frac{1}{10} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{8} \left(\frac{1}{10} \right) \right) \right]^3 = 49 + \frac{8}{10} + \frac{9}{10} \left(\frac{1}{10} \right) + \frac{6}{8} \left(\frac{1}{10} \left(\frac{1}{10} \right) \right) + \frac{7}{8} \left(\frac{1}{8} \left(\frac{1}{10} \left(\frac{1}{10} \right) \right) \right) + \frac{1}{8} \left(\frac{1}{8} \left(\frac{1}{8} \left(\frac{1}{10} \left(\frac{1}{10} \right) \right) \right) \right)$$

Ce qui prouve que cette valeur est par défaut.

Ensuite, il a calculé une autre valeur à travers la deuxième formule :

$\sqrt[3]{50} \approx 3 + \frac{7}{11} + \frac{3}{7} \left(\frac{1}{11} \right) + \frac{5}{6} \left(\frac{1}{7} \left(\frac{1}{11} \right) \right)$. Et, il a poursuivi ses calculs ainsi :

²²⁵ - La terminologie utilisée dans le texte est la suivante : *al-'imām* pour le dénominateur, *al-'aṣl* pour la racine et *al-fadla* pour l'excès.

$$\left[3 + \frac{7}{11} + \frac{3}{7} \left(\frac{1}{11}\right) + \frac{5}{6} \left(\frac{1}{7} \left(\frac{1}{11}\right)\right)\right]^3 = 50 + \frac{10}{11} \left(\frac{1}{11}\right) + \frac{4}{11} \left(\frac{1}{11} \left(\frac{1}{11}\right)\right) + \frac{4}{9} \left(\frac{1}{11} \left(\frac{1}{11} \left(\frac{1}{11}\right)\right)\right) + \frac{4}{7} \left(\frac{1}{11} \left(\frac{1}{11} \left(\frac{1}{11}\right)\right)\right) + \frac{2}{7} \left(\frac{1}{7} \left(\frac{1}{7} \left(\frac{1}{11} \left(\frac{1}{11} \left(\frac{1}{11}\right)\right)\right)\right)\right) + \frac{4}{7} \left(\frac{1}{7} \left(\frac{1}{7} \left(\frac{1}{7} \left(\frac{1}{11} \left(\frac{1}{11} \left(\frac{1}{11}\right)\right)\right)\right)\right)\right) + \frac{1}{6} \left(\frac{1}{6} \left(\frac{1}{6} \left(\frac{1}{7} \left(\frac{1}{7} \left(\frac{1}{11} \left(\frac{1}{11} \left(\frac{1}{11}\right)\right)\right)\right)\right)\right)\right)\right)$$

La deuxième valeur est alors par excès. Puis, il a proposé la formule suivante pour affiner l'approximation.

Formule 2

$$\sqrt[3]{A} \approx \frac{x_1 + x_2}{2}$$

Avec

$$x_1 = n + \sqrt{\left(\frac{1}{2} \left(\frac{3n^2}{3n+1}\right)\right)^2 + \frac{A-n^3}{3n+1} - \frac{1}{2} \left(\frac{3n^2}{3n+1}\right)}$$

$$x_2 = (n+1) - \left[\frac{1}{2} \left(\frac{3(n+1)^2}{3(n+1)-1}\right) - \sqrt{\left(\frac{1}{2} \left(\frac{3(n+1)^2}{3(n+1)-1}\right)\right)^2 - \frac{(n+1)^3 - A}{3(n+1)-1}} \right]$$

Al-Qaṭrawānī a exprimé le principe de la moyenne arithmétique dans le but de minimiser les erreurs commises en utilisant les deux formules d'Ibn Munōim. Il a utilisé l'expression de « affinement de l'approximation » pour nommer ce procédé d'approximation.

Les résultats suivants montrent la précision de la nouvelle valeur obtenue par ce procédé

$$x_3 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) = 3 + \frac{7}{11} + \frac{4}{10} \left(\frac{1}{11}\right) + \frac{1}{8} \left(\frac{1}{10} \left(\frac{1}{11}\right)\right) + \frac{4}{7} \left(\frac{1}{8} \left(\frac{1}{10} \left(\frac{1}{11}\right)\right)\right) + \frac{3}{6} \left(\frac{1}{7} \left(\frac{1}{8} \left(\frac{1}{10} \left(\frac{1}{11}\right)\right)\right)\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{6} \left(\frac{1}{7} \left(\frac{1}{8} \left(\frac{1}{10} \left(\frac{1}{11}\right)\right)\right)\right)\right)$$

Et

$$(x_3)^3 = 49 + \frac{10}{11} \left(\frac{12}{11} \left(\frac{1}{11}\right)\right) + \frac{5}{8} \left(\frac{1}{8} \left(\frac{1}{11} \left(\frac{1}{11} \left(\frac{1}{11}\right)\right)\right)\right) + \frac{2}{8} \left(\frac{1}{8} \left(\frac{1}{(11)^3}\right)\right) + \frac{5}{8} \left(\frac{1}{8^4 \cdot (11)^3}\right) + \frac{2}{7} \left(\frac{1}{8^5 \cdot (11)^3}\right) + \frac{3}{7} \left(\frac{1}{7} \left(\frac{1}{8^5 \cdot (11)^3}\right)\right) + \frac{2}{7} \left(\frac{1}{7^2 \cdot 8^5 \cdot (11)^3}\right) + \frac{3}{6} \left(\frac{1}{7^3 \cdot 8^5 \cdot (11)^3}\right) + \frac{1}{6} \left(\frac{1}{6^2 \cdot 7^3 \cdot 8^5 \cdot (11)^3}\right)$$

Formule 3

$$\text{Si } (A - n^3) < ((n+1)^3 - A) \quad \text{alors } \sqrt[3]{A} \approx n + \frac{A - n^3}{3n^2}$$

$$\text{Si } (A - n^3) > ((n+1)^3 - A) \quad \text{alors } \sqrt[3]{A} \approx (n+1) - \frac{(n+1)^3 - A}{3(n+1)^2}$$

Cette formule a été énoncée par Yaōīsh Ibn Ibrāhīm al-Amawī mais sans aucune justification. Nous signalons aussi qu'il n'a pas utilisé d'exemples pour expliciter les étapes de

ce calcul ou pour vérifier l'efficacité du procédé. Dans son exposé, il n'a fait aucune allusion aux erreurs commises à travers ce procédé ou à travers ceux de la racine carrée.

Nous avons déjà signalé qu'al-Amawī connaissait les procédés d'approximation d'Ibn al-Bannā du moins ceux de la racine carrée. Aussi, nous pouvons utiliser le raisonnement d'Ibn al-Bannā pour justifier ce procédé d'approximation.

Pour le premier cas, on pose $\sqrt[3]{A} = n + x$ avec $0 < x < 1$. Ainsi $A = (n + x)^3 = n^3 + 3n^2x + 3nx^2 + x^3$.

On néglige les termes en x dont la puissance est supérieure ou égale à deux et on obtient : $A - n^3 \approx 3n^2x$. D'où $x \approx \frac{A - n^3}{3n^2}$.

Le deuxième cas peut être traité de la même manière c'est-à-dire en posant $\sqrt[3]{A} = (n + 1) - x$ avec $0 < x < 1$.

On obtient ainsi $A = (n + 1)^3 - 3(n + 1)^2x + 3(n + 1)x^2 - x^3$.

Puis, en considérant $x^3 \approx 0$ et $x^2 \approx 0$ on aura $x \approx \frac{(n + 1)^3 - A}{3(n + 1)^2}$.

Il est très probable qu'al-Amawī ait lui-même formulé le procédé en s'inspirant seulement du raisonnement d'Ibn al-Bannā. Mais, cette hypothèse suppose qu'il avait connaissance du contenu du *Rafô al-hijāb*. Nous n'écartons pas aussi la possibilité que ce procédé ait été connu dans la tradition d'al-Andalus bien qu'Ibn Zakariyyā ne l'a pas cité.

L'erreur commise est par excès car :

$$\left(n + \frac{A - n^3}{3n^2}\right)^3 = n^3 + 3n^2\left(\frac{A - n^3}{3n^2}\right) + 3n\left(\frac{A - n^3}{3n^2}\right)^2 + \left(\frac{A - n^3}{3n^2}\right)^3.$$

$$\text{Ainsi, } \left(n + \frac{A - n^3}{3n^2}\right)^3 = A + \left[3n\left(\frac{A - n^3}{3n^2}\right)^2 + \left(\frac{A - n^3}{3n^2}\right)^3\right].$$

Pour la deuxième expression, nous avons :

$$\left((n + 1) - \frac{(n + 1)^3 - A}{3(n + 1)^2}\right)^3 = A + \left[3(n + 1)\left(\frac{(n + 1)^3 - A}{3(n + 1)^2}\right)^2 - \left(\frac{(n + 1)^3 - A}{3(n + 1)^2}\right)^3\right].$$

Avec :

$$\left[3(n+1) \left(\frac{(n+1)^3 - A}{3(n+1)^2} \right)^2 - \left(\frac{(n+1)^3 - A}{3(n+1)^2} \right)^3 \right] = \left(\frac{(n+1)^3 - A}{3(n+1)^2} \right)^2 \left(3(n+1) - \frac{(n+1)^3 - A}{3(n+1)^2} \right) > 0$$

Nous signalons aussi qu'al-Amawī n'a pas utilisé l'idée d'itérer le procédé. Nous pouvons vérifier qu'on peut retrouver les valeurs qu'il a proposées à partir de la suite

$$\text{récurrente suivante : } \begin{cases} x_1 \\ x_{n+1} = x_{n-1} - \frac{(x_{n-1})^3 - A}{3(x_{n-1})^2} \end{cases}$$

Effectivement, si on pose $x_1 = n$ on obtient la valeur suivante

$$x_2 = n - \frac{n^3 - A}{3n^2} = \frac{3n^3 + (A - n^3)}{3n^2} = n + \frac{A - n^3}{3n^2}.$$

$$\text{Si on pose } x_1 = (n+1) \text{ on obtient } x_2 = (n+1) - \frac{(n+1)^3 - A}{3(n+1)^2}.$$

Au XV^e siècle, al-Qalaṣādī n'a pas abordé le calcul de la racine cubique d'un nombre.

Mais, le commentateur d'un de ses ouvrages, Muḥammad Ibn yūsuf aṭ- Ṭfayyash, a exposé le procédé d'approximation de la racine cubique d'Ibn al-Bannā. Nous avons déjà signalé qu'il a aussi repris l'étude de ce dernier sur la racine carrée, il a même reproduit tout un paragraphe du *Raf' al-ḥijāb*. Mais, il n'a pas mentionné le nom d'Ibn al-Bannā ni le titre de son ouvrage.

Pour le calcul de la racine cubique, aṭ- Ṭfayyash a reproduit le texte d'Ibn Haydūr. Il a repris l'exemple que ce dernier a proposé et il a utilisé le symbolisme algébrique du XIV^e siècle pour écrire l'équation quadratique à laquelle il a aboutit.

II-4.4. Les procédés d'approximation de la racine cubique d'une fraction

Formule 4

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \sqrt[3]{\frac{ak}{bk}} = \frac{\sqrt[3]{ak}}{\sqrt[3]{bk}}$$

Cette formule a été énoncée par al-Qatrawani en précisant que k est tel que (bk) soit un cube parfait.

Il a aussi distingué le cas où a et b sont des cubes parfaits pour lequel il a proposé de procéder ainsi $\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$.

III- EDITION ET ANALYSE DE TEXTES

III-1

EDITION ET ANALYSE DES TEXTES INEDITS

**III- 1. 1. Edition et analyse mathématique d'une section
du *al-Bayān wa at-tadhkār fī ōlm masā'il al-ḥisāb*
d'al-Ḥaṣṣār
Ms. Rabat, B.G, n° 917Q
ff. 77-78**

(مثال 1) إذا قيل لك كم جذر خمسة ؟

فتأخذ أقرب عدد مربع إلى خمسة فتجد أربعة فتسقطها من الخمسة الباقي واحد. فسم هذا الواحد من ضعف جذر أربعة يكن ربعا فاحمله على جذر الأربعة وهو إثنان يكن إثنين وربعا وهو جذر خمسة بتقريب. فإذا ضربت الإثنين وربعا في مثلها كان ذلك خمسة ونصف ثمن فقد وقع التقريب بنصف ثمن زائد.

(ملاحظة) فإن أردت أن تقرب العمل أكثر من هذا فإنك تضعف الإثنين والربع تكن أربعة ونصف فسم منها نصف الثمن يكن ذلك ثمن تسع فاسقطه من الربع التي مع الإثنين والربع يبقى إثنان وتسعان وثمان تسع. فإذا ضربته في مثله كان ذلك خمسة وثمان تسع التسع وهو أقرب من خمسة ونصف ثمن.

ولو أردت أقرب لضعفت الإثنين وتسعين وثمان التسع وتسمي من ذلك ثمن ثمن التسع فما كان اسقطه من الإثنين والتسعين وثمان تسع فما بقي فهو أقرب من جذر الأول.

باب منه آخر . (مثال 2) إذا قيل لك كم جذر عشرة ؟

فتنظر أقرب عدد مجذور إلى العشرة تجد تسعة فتسقطها من العشرة الباقي واحد فسمي ذلك الواحد من ضعف جذر التسعة وذلك ستة يكن سدسا فاحمله على الثلاثة التي هي جذر التسعة تكن ثلاثة وسدسا وهو جذر العشرة بتقريب.

وإن شئت فاضرب العشرة في أي عدد له جذر فكأنك ضربتها في مائة يكن المجتمع ألفا فتأخذ جذرها على ما تقدم بالتقريب يكن ذلك أحد وثلاثين وستة أعشار ونصف عشر فاقسمه على جذر المائة يكن ذلك ثلاثة وعشرا وستة أعشار عشر ونصف عشر عشر وهو أقرب من سدس.

(مثال 3) فإن قال كم جذر خمسة عشر ؟

فتأخذ أقرب عدد مربع إلى الخمسة عشر وذلك ستة عشر فاسقط منها الخمسة عشر الباقي منها واحد فسمه من ضعف جذر الستة عشر فاسقطه من جذر الستة عشر يكن الباقي ثلاثة وسبعة أثمان وهو جذر خمسة عشر بتقريب.

(مثال 4) وإن قيل كم جذر عشرين ؟

فتأخذ إن شئت الستة عشر وإن شئت الخمسة والعشرين لأن العشرين واسطة بين هذين العددين المربعين. فكأنك أخذت الستة عشر فاسقطها من العشرين الباقي أربعة فسمها من ضعف جذر الستة عشر تكن نصفاً فأضفه إلى جذر الستة عشر يكن أربعة ونصف وهو جذر العشرين بتقريب.

وإن أخذت الخمسة والعشرين فاسقط منها العشرين الباقي خمسة فسمها من ضعف جذر الخمسة والعشرين تكن نصفاً فاسقطها من الخمسة جذر الخمسة والعشرين الباقي أربعة ونصف وهو جذر العشرين بتقريب.

باب منه آخر : (مثال 5) إذا قيل لك كم جذر إثنين ونصف ؟

هذه المسألة ليس لها جذر فصير الإثنين والنصف أنصافا تكن خمسة اضربها في الإثنين تكن عشرة فتأخذ جذر العشرة على ما تقدم يكن ثلاثة وسدسا فاقسمها على الإثنين يخرج واحد وثلاثة أسداس ونصف سدس.

وإن شئت إذا صيرت الإثنين والنصف أنصافا وضربتها في إثنين صارت عشرة فاضرب هذه العشرة في الستة والثلاثين تكن ستين وثلاثمائة ثم اضرب الإثنين مقام النصف في جذر الستة والثلاثين تكن إثني عشر وهي الإمام ثم تأخذ جذر الستين وثلاثمائة وذلك تسعة عشر بتقريب فاقسمه على الإثني عشر.

باب منه آخر : (مثال 6) إذا قيل لك كم جذر ثلث ؟

فاضرب ثلث في ستة وثلاثين تكون إثني عشر فتأخذ جذرها وذلك ثلاثة ونصف بتقريب فاقسمه على جذر الستة والثلاثين يخرج ثلاثة أسداس ونصف سدس.

وإن شئت فاعمله بالعمل المتقدم وذلك ان تضرب نصفاً في مثله يكن ربعاً فتسقطه [78] / من ثلث يبقى نصف سدس فاحمله على النصف يكن ثلاثة أسداس ونصف سدس وهو جذر ثلث.

5

(مثال 7) فإن قيل لك كم جذر ثلاثة أرباع فاضربها في عدد مربع له ربع فكأنه في ستة عشر يكن الخارج إثني عشر فتأخذ جذرها وذلك ثلاثة ونصف بتقريب فاقسمه على جذر الستة عشر يخرج سبعة أثمان.

(مثال 8) فإن قيل لك كم جذر ثلاثة أسباع ؟

فاضرب ثلاثة أسباع في عدد مربع له سبع وذلك تسعة وأربعون يكن واحداً وعشرين فتأخذ جذرها يكن أربعة وثلاثة أخماس فاقسمه على جذر التسعة والأربعين يخرج أربعة أسباع وثلاثة أخماس السبع فافهم تصب إن شاء الله تعالى كمل بحمد الله وحسن عونه وصلى الله على مولانا محمد وآله وصحبه وسلم.

10

3- يخرج : مضموسة // 4- من ثلث : من ثلاثة // 5- ثلاثة أسداس : ثلاثة وسدس // 10- ثلاثة أخماس : ثلاثة أرباع.

ANALYSE MATHÉMATIQUE

Chapitre sur l'extraction de la racine carrée [d'un nombre qui n'est pas un carré parfait] par approximation

[Exemple 1]

$$\sqrt{5}?$$

$$\sqrt{5} = \sqrt{2^2 + 1} \approx 2 + \frac{1}{2 \cdot 2} = 2 + \frac{1}{4}$$

$$\text{Avec } \left(2 + \frac{1}{4}\right)^2 = 5 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{8}\right)$$

$$\text{L'erreur est par excès et vaut } \frac{1}{2} \left(\frac{1}{8}\right).$$

[Proposition 1]

Soit A le nombre dont cherche la racine. Il est encadré par deux nombres carrés consécutifs n^2 , $(n+1)^2$.

$$\text{Si } A - n^2 < (n+1)^2 - A \text{ alors } \sqrt{A} \approx n + \frac{A - n^2}{2n}$$

[Remarque]

Pour obtenir une valeur plus précise [dans l'exemple précédent, on continue ainsi] :

$$2 + \frac{1}{4} - \frac{\left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{8}\right)\right)}{2 \left(2 + \frac{1}{4}\right)} = 2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} \left(\frac{1}{9}\right) = 2 + \frac{2}{9} + \frac{1}{8} \left(\frac{1}{9}\right)$$

$$\text{Et } \left(2 + \frac{2}{9} + \frac{1}{8} \left(\frac{1}{9}\right)\right) = 5 + \frac{1}{8} \left(\frac{1}{8} \left(\frac{1}{9} \left(\frac{1}{9}\right)\right)\right).$$

[L'erreur est par excès] mais si on veut une meilleure approximation on continue ainsi :

$$2 + \frac{2}{9} + \frac{1}{8} \left(\frac{1}{9}\right) - \frac{\frac{1}{8} \left(\frac{1}{8} \left(\frac{1}{9} \left(\frac{1}{9}\right)\right)\right)}{2 \left(2 + \frac{2}{9} + \frac{1}{8} \left(\frac{1}{9}\right)\right)}.$$

[Proposition 2]

$$\sqrt{A} \approx n + \frac{A - n^2}{2n} - \frac{\left(\frac{A - n^2}{2n}\right)^2}{2 \left(n + \frac{A - n^2}{2n}\right)}$$

C'est une deuxième valeur approchée de \sqrt{A} qui vérifie

$$\left(\frac{A-n^2}{2n}\right)^2 = \left(n + \frac{A-n^2}{2n}\right)^2 - A.$$

Si on pose x_1 la première approximation et x_2 la deuxième approximation alors la troisième peut être calculée ainsi : $x_3 = x_2 - \frac{x_2^2 - A}{2x_2}$].

[Exemple 2]

$\sqrt{10}$?

$$\sqrt{10} = \sqrt{3^2 + 1} \approx 3 + \frac{1}{2 \cdot 3} = 3 + \frac{1}{6}$$

On peut aussi procéder ainsi :

$$\sqrt{10} = \frac{\sqrt{10 \cdot 100}}{\sqrt{100}} \approx \frac{31 + \frac{6}{10} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{10}\right)}{\sqrt{100}} = 3 + \frac{1}{10} + \frac{6}{10} \left(\frac{1}{10}\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{10} \left(\frac{1}{10}\right)\right).$$

Cette deuxième valeur est plus précise que la précédente. [D'où la proposition suivante :

[Proposition 3]

$$\sqrt{A} = \frac{\sqrt{A \cdot b^2}}{b}$$

$\sqrt{A \cdot b^2}$ est calculée par approximation car $(A \cdot b^2)$ n'est pas un carré parfait]

[Exemple 3]

$\sqrt{15}$?

$$\sqrt{15} = \sqrt{4^2 - 1} \approx 4 - \frac{1}{2 \cdot 4} = 3 + \frac{7}{8}.$$

[Proposition 4]

$$\text{Si } A - n^2 > (n+1)^2 - A \text{ alors } \sqrt{A} \approx (n+1) - \frac{(n+1)^2 - A}{2(n+1)}$$

[Exemple 4]

$\sqrt{20}$?

Dans ce cas, nous avons [$25 - 20 = 5$ et $20 - 16 = 4$] et le nombre 20 est considéré comme une moyenne entre les deux carrés qui se succèdent 25 et 16.

$$\sqrt{20} \approx 4 + \frac{4}{2 \cdot 4} = 4 + \frac{1}{2} = 5 - \frac{5}{2 \cdot 5}.$$

[Proposition 4

$$\text{Si } A = \left[\frac{1}{2} (n^2 + (n+1)^2) \right] \text{ alors } \sqrt{A} \approx n + \frac{A - n^2}{2n} = (n+1) - \frac{(n+1)^2 - A}{2(n+1)}$$

[Exemple 5]

$$\sqrt{2 + \frac{1}{2}}?$$

$$\sqrt{2 + \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{5}{2}} = \frac{\sqrt{5 \cdot 2}}{2} = \frac{\sqrt{10}}{2} \approx \frac{3 + \frac{1}{6}}{2} = 1 + \frac{3}{6} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{6} \right)$$

[Proposition 5

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a \cdot b}}{b}$$

Si $(a \cdot b)$ n'est pas un carré parfait alors $\sqrt{a \cdot b}$ sera calculé par approximation].

[Exemple 6]

$$\sqrt{2 + \frac{1}{2}}?$$

$$\sqrt{2 + \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{5}{2}} = \frac{\sqrt{5 \cdot 36}}{\sqrt{36}} = \frac{\sqrt{90}}{6} \approx \frac{9 + \frac{1}{2}}{6} = 1 + \frac{3}{6} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{6} \right)$$

[Proposition 6

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right) \cdot (c \cdot b)^2}}{c \cdot b}$$

[Exemple 7]

$$\sqrt{2 + \frac{1}{2}}?$$

$$\sqrt{2 + \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{10}}{2} = \frac{\sqrt{10 \cdot 36}}{2 \cdot 6} = \frac{\sqrt{360}}{12}$$

Pour déterminer la valeur du numérateur on utilise les procédés d'approximation déjà cités

[Proposition 7

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a \cdot b}}{b} = \frac{\sqrt{(a \cdot b) \cdot c^2}}{b \cdot c}$$

[Exemple 8]

$$\sqrt{\frac{1}{3}} ?$$

$$\sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right) \cdot 36}}{6} = \frac{\sqrt{12}}{6} \approx \frac{3 + \frac{1}{2}}{6} = \frac{3}{6} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{6}\right)$$

$$\text{Ou bien : } \sqrt{\frac{1}{3}} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{6}\right)} \approx \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{6}\right)}{2 \left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{3}{6} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{6}\right)$$

[Proposition 8]

$$\sqrt{\left(\frac{c}{d}\right)^2 + \frac{a}{b} - \left(\frac{c}{d}\right)^2} \approx \frac{c}{d} + \frac{\frac{a}{b} - \left(\frac{c}{d}\right)^2}{2 \left(\frac{c}{d}\right)}$$

[Exemple 9]

$$\sqrt{\frac{3}{4}} ?$$

$$\sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{\left(\frac{3}{4}\right) \cdot 16}}{4} = \frac{\sqrt{12}}{4} \approx \frac{3 + \frac{1}{2}}{4} = \frac{7}{8}$$

[Exemple 10]

$$\sqrt{\frac{3}{7}} ?$$

$$\sqrt{\frac{3}{7}} = \frac{\sqrt{\left(\frac{3}{7}\right) \cdot 49}}{7} = \frac{\sqrt{21}}{7} \approx \frac{4 + \frac{3}{5}}{7} = \frac{4}{7} + \frac{3}{5} \left(\frac{1}{7}\right)$$

III- 1. 2. Edition et analyse mathématique d'une section du
***Fiqh al-ḥisāb* d'Ibn Munôim**
Ms. Rabat, B.G, n°416Q
ff. 410-417

[410]// صنعة أخذ الجذور والضلع بالتقريب من الباب الثاني من الجزء العملي في الحساب.
(ملاحظة-1) اعلم أن عددا كثيرا من الأعداد المنطقية ليس لها جذر، فإن العشرة ليس لها جذر ولو كان لها جذر للزم أن يكون أكثر من ثلاثة وأقل من أربعة. وليس بين الثلاثة والأربعة عدد صحيح. فإن قال قائل إن العشرة لها جذر وذلك الجذر هو ثلاثة وكسر، وإن كنا لا نعرف ذلك الكسر، قلنا إن ذلك لا يمكن.

5
وبرهان ذلك أنك إذا بسطت الثلاثة مع الكسر الزائد، الذين على زعمك أنهما الجذر، كان الخارج من البسط هو العدد الذي قسم على الأئمة فخرج الصحيح وهي الجزء أو الأجزاء من الأئمة التي هي الكسر الزائد. فإذن الأئمة لا تعد ذلك البسط، وإذا ضرب البسط في مثله وقسمته على ضرب الأئمة في مثله خرج قولك عشرة وهو صحيح. وإذا كان المربع يعد المربع فالضلع يعد الضلع. وقد كان لا يعده هذا خلف. فليس للعشرة جذر.

10
(ملاحظة-2) وبمثل هذا البرهان يبين في المكعب، لأنه لو كان للعشرة ضلع مكعب فكان يلزم أن يكون إثنين وكسرا. وإذا بسطت الإثنين مع الكسر كان منه العدد الذي قسمته على أئمة ذلك الكسر، فخرج الصحيح وبقي الجزء أو الأجزاء. فإذن الأئمة لا تعد ذلك البسط. فإذا كعبت البسط وقسمته على مكعب الأئمة خرج عشرة على زعمنا وهو صحيح. وإذا كان [411]// المكعب يعد المكعب فالضلع يعد الضلع، فإن أئمة ذلك يعد البسط وقد كانت لا يعده، هذا خلف وكذلك بين ناهضا ما نهض.

15
 فإذن من الأعداد ما ليس لها جذر أصلا. ولما كانت الحاجة تدعو إلى استخراج هذا النوع من الجذور لضرورة الناس إليه في المساحات والمعاملات وفي التعاليم وغير ذلك، رأيت أن أذكر شيئا من مسائل هذا النوع تستدل بها على ما نذكره. والله الموفق.

مسائل أخذ الجذر:

20
(ميرهنة-1) فإن أردت أن تأخذ جذر عدد ما غير مربع. فلنأخذ جذر أقرب مربع إليه سواء كان ذلك المربع أكبر من الذي تريد أخذ جذره أو أصغر، وتأخذ الفضل بين ذلك المربع والعدد الذي تريد أخذ جذره وتقسم ذلك الفضل على ضعف جذر ذلك المربع وتحفظ الخارج. فإن كان المربع أكبر نقصت ذلك المحفوظ من جذر المربع وإن كان أصغر زدت ذلك المحفوظ على جذر المربع فما كان بعد الزيادة أو النقصان فهو جذر العدد الذي تريد أخذ جذره بالتقريب.

25
والبرهان على ما قلنا وعلى قدر التقريب فيه هو على ما أصفه لك. فنفرض اجـ العدد الذي أخذ جذره والمربع القريب منه اب، ونفرض ضلع اب هو ك ر والخارج من قسمة بجـ على ضعف ك ر نفرضه ر ع ونفرض مربع ر ع اط. فأقول إن ك ع هو جذر اجـ بالتقريب وذلك التقريب هو مربع ع ر.

30
(الشكل-2) برهانه أن بجـ لما قسم على ضعف ك ر فخرج ع ر، ف ضرب ك ر في ر مرتين هو جـ ومربع ر ع هو اط ومربع ك ر هو اب. فمربع ك ع هو ط جـ وذلك يزيد على اجـ بمربع ر ع وذلك ما أردنا بيانه.

(ملاحظة-3) وإن أردت أن تستخرج جذر هذه الأعداد بمربعات أقرب إليها من الكسور فعلت وكان

9- فالضلع يعد الضلع : فالضلع يعد //13- مكعب الأئمة : مكعب بسط الأئمة//16- كانت الحاجة : كانت الحارج//23- اب : اجـ //27- تفرضه : نفرض أيضا //30- ر ع : ر ع ك.

التقريب في ذلك أقل لأنه كيف ما كان المربع أقرب إلى الذي تريد أخذ جذره كان التقريب أقل. مثال ذلك لو قال لك كم جذر عشرين فتجد المربع القريب إليه عشرين وربعا وجذرها أربعة ونصف فتضعفها تكن تسعة وهو الإمام. ثم تسقط العشريين من العشرين وربعا يبقى ربع فاقسمه على الإمام يخرج لك ربع تسع العشريين وربعا، الذي هو أربعة ونصف، يخرج لك أربعة وأربعة أضعاف ربع تسع وهو جذر العشرين بتقريب. فإذا ضربنا أربعة وأربعة أضعاف ربع التسع في مثله يجتمع لك من ذلك عشرون ونصف ثمن تسع التسع وهو أقرب من العمل الذي تعمل بالمربعات الصحاح. وإن شئت أن تجعل التقريب أقل كنت تأخذ هذا المربع الذي هو عشرون ونصف ثمن تسع وتستخرج له ضلعا آخر [412] // على ما تقدم.

5

مسألة : كم جذر أربعة عشر بالتقريب.

فتأخذ أقرب مربع إليه، وذلك ستة عشر. فتجده يزيد على الأربعة عشر بإثنين، فتسمي الإثنين من ضعف الجذر الذي هو أربعة فيكون ثمنين، فتتقصه من الجذر لأجل أن المربع أكبر من الأربعة عشر فتبقى ثلاثة وستة أثمان وهو الجذر بالتقريب فافهم.

10

(مبرهنة-2) وإن أردت أيضا أن تقرب أكثر من هذا التقريب بطريق آخر فعلت على هذه الصورة وذلك أن تضرب في العدد الذي تريد أخذ جذره عددا مربعا وكيف ما أردت أن يكون التقريب أكثر جعلت

المربع أكبر وتأخذ جذر المجتمع بالتقريب فما خرج تقسمه على جذر العدد المربع الذي ضربت فيه، فما خرج فهو الجذر بالتقريب.

15

(ملاحظة-4) فإن كان العدد الذي تريد أخذ جذره بالكسر، طلبت مربعا إذا ضربته فيه كان الخارج صحيحا، فإذا وجدته ضربت في العدد، الذي تريد أخذ جذره، وأخذت جذر المجتمع بالتقريب فما خرج قسمته على جذر المربع، الذي ضربته فيه قبل، فما كان فهو الخارج بالتقريب. فإن صعب عليك طلب هذا المربع، فوجه العمل في وجوده أن تضرب أئمة كسرك بعضها في بعض وما اجتمع في مثله، فما خرج فهو المربع الذي طلبت.

20

مسألة بوجه حسن مليح :

كم جذر ثلاثة وسبعة أثمان ونصف ثمن؟

فيجتمع ثلاثة وستون. فتضرب ذلك في أئمة السبعة أثمان ونصف ثمن وذلك في ثمانية وما اجتمع في إثنين، فيجتمع 1008. فتأخذ جذر ذلك بالتقريب، كما تقدم في أخذ جذر الصحيح بالتقريب، فما خرج تقسمه على الأئمة، التي هي إثنان وثمانية، فما خرج فهو جذر الثلاثة وسبعة أثمان ونصف الثمن.

25

كان البسط أنصاف أثمان. فإذا ضربتها في الأئمة وذلك في إثنين وما اجتمع في ثمانية عادت أنصاف أنصاف أثمان وهو ما في الثلاثة وسبعة أثمان من أنصاف أنصاف أثمان أثمان. فيكون جذرها أنصاف أثمان، فإذا قسمت ذلك الجذر على إثنين وما خرج على ثمانية كان الخارج صحيحا وأثمانا وأنصاف أثمان وهو الجذر بالتقريب.

30

في استخراج أضلاع المكعبات الصم على التقريب

ولما كانت الضرورة تدعو إلى ذلك في المساحات والمعاملات وما جاء منها، ذكرت من ذلك ما قد ذكره القدماء..

(ملاحظة 5) فنقول إن المكعبات من الأعداد الصحيحة إنما هي المولية من الواحد إلى الثمانية إلى السبعة وعشرين إلى الأربعة وستين ناهضا ما نهضت. وهي التي تتفاضل أضلاعها بواحد واحد. فلزم من ذلك أن ما بين كل مكعبين من هذه المكعبات المتوالية غير مكعب. فإن الخمسة وثلاثين لو كان لها ضلع تكعيب للزم أن يكون أكثر من ثلاثة وأقل من أربعة وليس [413] // بين الثلاثة والأربعة عدد صحيح. فإن زعم أن الخمسة وثلاثين لها ضلع وضلعه ثلاثة وكسر، وإن كنا لا نعرف ذلك الكسر، قلنا قد برهننا أن ليس مكعب صحيح وفي ضلعه كسر. فلأجل ذلك متى أراد الإنسان استخراج ضلع خمسة وثلاثين فإنما يخرج على المقاربة لا على الحقيقة، ونمثل من ذلك أمثلة تستدل بها.

مسألة : سبعون كم ضلعها؟

- (مبرهنة 3) فوجه العمل أن نتظر أقرب مكعب إليه في الصحيح فتجده أربعة وستين، وهو أقل منه.
- 10 فتأخذ الفضل الذي بين الأربعة وستين وبين السبعون وذلك ستة فتحفظها. ثم تأخذ ضلع الأربعة وستين وذلك أربعة، فاضربها في ثلاثة أبدا يجتمع إثني عشر فتزيد عليها واحدا أبدا يجتمع ثلاثة عشر، فاتخذها إماما ثم اقسم عليها فضل ما بين المكعبين وذلك ستة يخرج ستة أجزاء من ثلاثة عشر فاحفظ ذلك. ثم تضرب ضلع الأربعة والستين في مثله وما اجتمع في ثلاثة يجتمع ثمانية وأربعون فاقسمها على الإمام يخرج لك ثلاثة وتسعة أجزاء من ثلاثة عشر، فتأخذ نصفها يخرج لك واحد وأحد عشر جزءا من ثلاثة عشر. فنضرب ذلك في مثله يخرج ثلاثة وخمسة أجزاء من ثلاثة عشر وأربعة أجزاء من ثلاثة عشر في الجزء من ثلاثة عشر، فتزيد ذلك على الستة أجزاء من ثلاثة عشر فيجتمع $3 \frac{4}{13}$ فتأخذ جذر ذلك على المقاربة، على ما تقدم في الفصل الذي قبل هذا- يكن ذلك $1 \frac{5}{4} \frac{4}{10} \frac{12}{13}$ فتتقص منه التنصيف الذي هو $1 \frac{11}{13}$ يبقى $\frac{5}{4} \frac{4}{10} \frac{1}{13}$ وهو الذي تزيده على الأربعة التي هي ضلع مكعب أربعة وستين. فيكون ضلع السبعين على المقاربة.
- 20 وبالبرهان على ما ذكرناه أنا نجعل السبعين اح والمكعب الأقرب إليه الأقل وهو أربعة وستون اب، فيبقى بح ستة. ولنجعل كـ ع ضلع اب فهو إذن أربعة، ولنتوهم كـ ص ضلع اح. (الشكل 2) لكن مكعب كـ ص مساو لمكعب كـ ع ومكعب ع ص وضرب ثلاثة أمثال مربع كـ ع في ع ص وضرب ثلاثة أمثال كـ ع في مربع ع ص على ما قد تبين في أول الكتاب. لكن ثلاثة أمثال مربع كـ ع 48 وثلاثة أمثال كـ ع إثني عشر فيكون في هذه المسألة مكعب كـ ص، الذي هو اح، مثل مكعب كـ ع
- 25 الذي هو اب، وضرب ع ص في 48 وضرب مربع ع ص في 12 هو مكعب ع ص. فإذا أسقطنا اب، الذي هو مكعب كـ ع، من اح الذي هو مكعب كـ ص بقي بح الذي هو ستة مثل مكعب ع ص وضرب مربع ع ص في 12 وضرب ع ص في ثمانية وأربعين. لكن ضرب مربع ع ص في 12 هو 12 مثل مربع ع ص. فيكون معنا مكعب ع ص وإثني عشر مثل مربعه وضرب ع ص في ثمانية وأربعين مثل بح الذي هو ستة. ونجعل عوضا من مكعب ع ص مربعه تقريبا فيكون معنا ثلاثة عشر مثل مربع ع ص وضرب ع ص في ثمانية وأربعين
- 30

مثل ح ب والذي هو ستة. فتقسم جميع ما معنا على ثلاثة عشر، الذي هو عدد أمثال مربع ع ص، فيكون مربع ع ص وضرب ع ص في ثلاثة وتسعة أجزاء من ثلاثة عشر مثل ستة أجزاء من ثلاثة عشر. وتمد ع ص على استقامة إلى ر. ولنجعل ص ر $\frac{9}{13}$ فيكون مربع ع ص وضرب ع

ص في ص ر $\frac{6}{13}$. ولكن مربع ع ص وضرب ع ص في ص ر مثل ر ع في ع ص. فضرب إذن

5 ر ع في ع ص $\frac{6}{13}$. وتقسم ص ر بنصفين على نقطة ف فيكون خط ص ر قسم بنصفين على ف و زيد

في طوله زيادة ع ص ف ضرب الخط مع الزيادة في الزيادة ومربع نصف الخط مساو لمربع نصف الخط مع الزيادة. لكن ضرب الخط مع الزيادة في الزيادة $\frac{6}{13}$ وضرب نصف الخط في مثله $\frac{5}{13} \frac{5}{13}$.

فتحمل عليه $\frac{6}{13}$ فيكون ذلك مربع ع ف وذلك $\frac{5}{13} \frac{11}{13}$. فنأخذ جذر ذلك على المقاربة فيكون

$$1 \frac{4}{5} \frac{5}{10} \frac{12}{13} \text{ فتسقط منه ص ف وهو } 1 \frac{11}{13} \text{ فيبقى ع ص } \frac{4}{5} \frac{5}{10} \frac{1}{13} \text{، و ك ع } 4 \text{ فجميع ك ص}$$

10 $\frac{4}{5} \frac{5}{10} \frac{1}{13}$ وهو ضلع اح على المقاربة.

(ملاحظة 6) فيكون التقريب في هذا العمل في موضعين : أحدهما في أن نجعل مربع ع ص عوضا من مكعب ع ص والثاني في استخراج جذر ع ف. فإن ع ف غير منطوق وبهذا يكون التقريب في أضلاع المكعبات الغير منطقة أكثر من التقريب في استخراج أضلاع الجذور الصم، ولذلك يقرب الجذر بالتقريب من الحقيقة أكثر.

15 مسألة : كم ضلع مكعب إثنين وأربعين.

(مبرهنة 4) ويريد استخراج ضلعه بضلع المكعب الذي هو أكبر منه مما هو أقرب إليه، والمكعب الذي هو أكبر منه أربعة وستون. فإذا أردنا ضلع الإثنين والأربعين أخذنا ضلع الأربعة والستين وذلك أربعة فاضرب هذه الأربعة في ثلاثة أبدا يكون ذلك إثني عشر، فاسقط منها واحدا أبدا يبقى أحد عشر فاتخذ إماما، ثم تسقط المكعب الذي هو إثنان وأربعون من المكعب الذي هو أربعة وستون يبقى إثنان

20 وعشرون، فاقسمها على الإمام يخرج لك إثنان، فاحفظها ثم تضرب الأربعة التي هي ضلع الأربعة

وستين في مثلها وما اجتمع في ثلاثة أبدا يكن ذلك ثمانية وأربعين فاقسمها على الإمام يخرج لك أربعة وأربعة أجزاء من أحد عشر فتأخذ نصفها بإثنين وجزأين من أحد عشر، اضربها [415] // في مثلها فتكون أربعة وثمانية أجزاء من أحد عشر وأربعة أجزاء من أحد عشر في الجزء من أحد عشر.

اطرح منه الإثنين يبقى منه إثنان وثمانية أجزاء من أحد عشر وأربعة أجزاء من أحد عشر في

25 الجزء من أحد عشر فتأخذ جذرها على ما تقدم في أخذ الجذر بالتقريب فيكون واحد وسبعة أجزاء من

أحد عشر وتسعين ونصف تسع الجزء من أحد عشر. فإذا نقصت هذه الذي هو إثنان وجزءان من أحد

عشر، يبقى خمسة أجزاء من أحد عشر وستة أتساع الجزء من أحد عشر ونصف تسع الجزء من أحد

عشر فتسقط هذا من الأربعة، التي هي ضلع الأربعة وستين، يبقى ضلع الإثنين وأربعين على المقاربة

ثلاثة وخمسة أجزاء من أحد عشر وتسعان ونصف تسع الجزء من أحد عشر.

1- ح ب : ب ح ك // 3- تمد : تنفر // 10- ضلع اح على المقاربة : ضلع اح على المقاربة وذلك // 11- عوضا من

مكعب ع ص : عوضا // 12- التقريب في أضلاع : التقريب أضلاع // 25- فيكون واحد وسبعة أجزاء : فيكون أجزاء //

27- وستة أتساع الجزء من أحد عشر ونصف : وستة أتساع ونصف

فإذا كعبنا هذا الضلع كان من ذلك هذه الصورة 42 $\frac{1\ 2\ 8\ 1\ 6\ 6\ 1}{8\ 9\ 9\ 9\ 11\ 11\ 11}$ التقريب بالكسر الزائد.

ومعرفة موضع التقريب على ما أصفه لك. (البرهان) ليكن وع ضلع الأربعة وستين، الذي هو الكعب الأكبر، فخط وع أربعة. وليكن ور منه ضلع الإثنتين والأربعين على التوهم. فمربع وع ومربع ع ر إذا نقصنا منهما ضرب ع ر في ضعف وع يبقى مربع ور. وليكن مربع وع ل ف ومربع رع ل ك فجميع

5 ك ف هو مربع وع ومربع رع ولنجعل ح ف مثل ضرب ع ر في ضعف وع فيبقى ك ح مربع ور. فإذا ضربنا ور في ك ح كان ذلك مكعب ور وذلك إثتان وأربعون. ولكن رب وع في ك ف مثل ضرب وع في ل ف وفي ل ك، ولكن ضرب وع في ل ف أربعة وستون وضرب وع في ل ك هو مثل ضرب مربع رع في ع و. ولأن ل ف هو مربع وع و وع أربعة فيكون ضرب وع في ك ف مثل أربعة وستين وأربعة أمثال مربع رع، وأيضا ضرب رع في ح ف هو مثل ضرب مربع

10 ع في ضعف وع لأن ح ف هو من ضرب رع في ضعف وع فهو إذن ضرب رع في ضعف وع وما اجتمع في رع وهو مثل ضرب رع في مثله وما اجتمع في ضعف وع الذي هو ثمانية. ف ضرب مربع رع في ثمانية هو ضرب رع في ح ف فيكون إذن ضرب وع في ك ف و رع في ح ف مثل ضرب مربع رع في إثني عشر مع أربعة وستين فهذا يعدل طرفه الذي هو إثتان وأربعون وضرب وع في ح ف وضرب ع ر في ك ف فتسقط الإثنتين وأربعين المشتركة فيبقى مربع رع إثني عشر مرة مع الإثنتين

15 عشرين يعدل ضرب وع في ح ف و رع في ك ل. ولكن ضرب وع في ح ف هو ك ضرب رع في اثنتين وثلاثين، لأن ح ف هو ضرب رع في ضعف وع الذي هو ثمانية، ف ضرب وع في ح ف هو ضرب رع في ثمانية وما اجتمع في أربعة ولكن [416] // ضرب رع في ثمانية وما اجتمع في أربعة ك ضرب ثمانية في أربعة، لذي ذلك إثتان وثلاثون، وما اجتمع في رع. فقد تبين أن ضرب وع في ح ف ك ضرب رع في اثنتين وثلاثين وأيضا رب رع في ك ل الذي هو مكعب رع. فيكون منها

20 رب وع في ح ف و رع في ك ف مثل مكعب رع وضرب رع في ثمانية وأربعين فهذا يعدل إثني عشر مثل مربع رع مع إثني وعشرين. ونجعل مربع رع عوضا من مكعبه تقريبا فيكون مربع رع وضربه في ثمانية وأربعين يعدل إثني عشر من مربع رع مع اثني وعشرين فيسقط مربع رع المشترك فيبقى مربع رع أحد عشرة مرة مع اثني وعشرين مثل ضرب رع في ثمانية وأربعين. فنقسم جميع ما معنا على أحد عشر عدد مربعات رع فيكون بعد القسمة مربع رع أقل من أربعة وأربعة أجزاء من أحد

25 عشر، فتحط ذلك من أربعة وأربعة أجزاء من أحد عشر فيكون مربع رع مع اثني مثل ضرب رع في رط، ولكن ضرب رع في رط مثل مربع رع وضرب رع في ع ط فيكون مربع رع مع ضرب رع في ع ط مثل مربع رع مع اثني فتسقط مربع رع المشترك فيبقى ضرب رع في ع ط مثل اثني ونقسم رط بنصفين على د فيكون رد اثني وجزأين من أحد عشر ومربعه أربعة وثمانية أجزاء من أحد عشر وأربعة أجزاء الجزء من أحد عشر فتسقط منه ضرب رع في ع ط وهو إثتان فيبقى ضرب ع د في مثله

30 اثتان وثمانية أجزاء من أحد عشر وأربعة أجزاء الجزء من أحد عشر فتأخذ جذره يكون ع د وجذره

5- ك ف هو مربع وع ومربع ع ر : ك ف ومربع ع ر / في ضعف وع فيبقى // 7- ولكن ضرب وع في ل ف : ولكن ضرب وع في ل ف وفي ل ف // 26- رط : رو // 28- على د : على ح / عشر وأربعة أجزاء الجزء من أحد عشر فتسقط : عشر فتسقط

واحد وسبعة أجزاء من أحد عشر وتسعا الجزء ونصف تسع الجزء من أحد عشر وهو خط ع د، فتسقطه من خط رد وهو إثنان وجزآن من أحد عشر يبقى ربع خمسة أجزاء من أحد عشر وستة أضع ونصف تسع الجزء من أحد عشر، فإذا أسقطنا ذلك من وع وهو أربعة يبقى ور ثلاثة وخمسة أجزاء من أحد عشر وتسعان ونصف تسع الجزء من أحد عشر وهو ضلع الإثنيتين والأربعين بتقريب وذلك ما أردنا.

5 (الشكل 3)

(ملاحظة 7) فيدخل التقريب في هذا العمل في موضعين أحدهما في أن جعلنا مربع ربع عوضا من مكعبه. والثاني في أخذ جذر مربع ع د فإنه قل ما يوجد منها. وعلى هذا فقس كل ما يرد عليك من هذا النوع.

(مبرهنة 5) وأما إن كان معك عدد وكسر أو كسر مفروض من مكعب وأردت استخراج ضلعه على المقاربة، فإنك تطلب عددا مكعبا يكون فيه ذلك الجزء المذكور. وما كان العدد أكثر كان التقريب فيه أقل، ثم تأخذ ضلع المقام المكعب وتتخذة إماما وتضرب [417] // الأجزاء التي معك أو العدد مع الأجزاء في المقام المكعب فما اجتمع لك من الضرب فتأخذ ضلعه على ما تقدم بالتقريب فما كان قسمته على الإمام يخرج لك الضلع المطلوب على المقاربة.

20 مثال ذلك : إن قيل لك كم ضلع خمسين ونصف. فاطلب عددا مكعبا للنصف. فكأنك أخذت أربعة وستون وضلعها أربعة وهو الإمام، ثم تضرب خمسين ونصفا في المقام يكون ثلاثة ومائتين وإثنين وثلاثين ألفا فتأخذ ضلعها على ما تقدم بالتقريب يكن أربعة عشر وسبعة أضع فتقسمه على الإمام يخرج لك ثلاثة وستة أضع وربع تسع وهو ضلع الخمسين ونصف.

فإن أردت امتحانها بمكعب هذا الضلع يكن مكعب $40 \frac{4}{8} \frac{7}{8} \frac{3}{9} \frac{7}{9} \frac{2}{9}$. وإن طرحت هذا من

25 الخمسين وهو المكعب الذي تطلب ضلعه كان الفضل بينهما وهو التقريب.

وجه حسن : (مثال) إذا قيل لك كم ضلع مكعب $7 \frac{2}{3} \frac{7}{10}$ بالتقريب. فتبسط السبعة وسبعة أعشار وثلاثي

عشر فما خرج تضربه في الثلاثة وما اجتمع في العشرة وما اجتمع في الثلاثة مرة ثانية وما اجتمع في العشرة أيضا فما خرج تأخذ ضلعه بالتقريب كما قد ذكرت لك فما خرج تقسمه على الثلاثة وما خرج على العشرة وما خرج فهو ضلع السبعة وسبعة أعشار وثلاثي العشر.

30 وبرهان ذلك إذا بسطت السبعة وسبعة أعشار وثلاثي العشر كان البسط أثلث أعشار. فإذا ضربت ذلك في الثلاثة وما اجتمع في العشرة وما اجتمع في الثلاثة وما اجتمع في العشرة أيضا كان الخارج ما في السبعة وسبعة أعشار وثلاثي عشر من أثلث أثلث أعشار أعشار أعشار، فإذا قسمته على ثلاثة وما خرج على عشرة كان الخارج هو الضلع بالتقريب. وذلك ما أردنا بيانه.

1- وتسعا / وسبعا / تسع الجزء : سبع الجزء // 9- ضلعه : كعبه ضلعه.

الشكل-1¹

ط أ ب ج ع ر ك
| | | | | | | |

الشكل-2²

ح ب أ ر ف ص ع ك
| | | | | | | |

الشكل-3

ك ل ف ح ع ر د ط و
| | | | | | | |

¹ - ألحقنا بعض التغييرات على الأحرف الموجودة في الأشكال الأصلية وذلك إستنادا على التحليل الرياضي. التغييرات هي: ب : ج، ج : ب، ر : ع.

² - بالنسبة لهذا الشكل فإن النص الأصلي يحتوي فقط على الأحرف ا، ب، ح، ع، ص، و.

ANALYSE MATHÉMATIQUE

L'art de l'extraction des racines [carrée] et cubique par approximation

[Remarque 1]

Sache qu'il y a plusieurs nombres rationnels qui n'admettent pas de racine [carrée exacte]. Le nombre 10 [par exemple] n'admet pas de racine [carrée exacte].

En effet, supposons que 10 admettait une racine. Elle vérifiera $3 < \sqrt{10} < 4$. Or, il n'existe pas de nombres entiers entre les nombres 3 et 4 [par conséquent $\sqrt{10}$ n'est pas un nombre entier].

10 pourrait admettre une racine fractionnaire qui s'écrit $\sqrt{10} = 3 + \frac{p}{q}$ [avec p et q premiers entre eux]. Mais ce cas n'est pas possible.

Preuve de cela

[Posons $\sqrt{10} = 3 + \frac{p}{q}$]

$$3 + \frac{p}{q} = \frac{3q + p}{q}, \text{ avec } q \text{ ne divisant pas } (3q + p) \text{ et } \frac{(3q + p)^2}{q^2} = 10.$$

Dans ce cas, q^2 diviserait $(3q + p)^2$.

q diviserait aussi $(3q + p)$, ce qui est absurde.

Ainsi, 10 n'admet pas de racine [carrée exacte].

[Remarque 2]

De la même manière, nous prouvons que [le nombre 10 n'admet pas de racine] cubique [exacte].

En effet, si nous supposons que 10 admet une racine cubique on aura :

$$\sqrt[3]{10} = 2 + \frac{u}{v} \text{ [} u \text{ et } v \text{ des entiers premiers entre eux] et } 2 + \frac{u}{v} = \frac{2v + u}{v} \text{ avec } v \text{ ne divisant}$$

$$\text{pas } (2v + u) \text{ et aussi } \frac{(2v + u)^3}{v^3} = 10$$

Ainsi v^3 diviserait $(2v + u)^3$. Par conséquent, v diviserait $(2v + u)$ ce qui est absurde.

[Calcul de la] racine [carrée d'un nombre non carré]

[Proposition 1]

[Pour] tout nombre non carré A , on a : $n^2 < A < (n + 1)^2$ et :

$$\text{Si } (A - n^2) > ((n + 1)^2 - A) \text{ alors } \sqrt{A} \approx (n + 1) - \frac{(n + 1)^2 - A}{2(n + 1)} \quad (1)$$

$$\text{Si } (A - n^2) < ((n + 1)^2 - A) \text{ alors } \sqrt{A} = n + \frac{A - n^2}{2n} \quad (2)$$

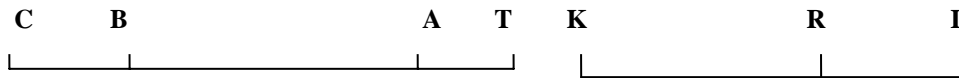
Preuve

Soient AC le nombre dont on veut calculer la racine et AB le carré le plus proche de AC .

Posons :

$$AB = KR^2, \quad \frac{BC}{2.KR} = RI \quad \text{et} \quad RI^2 = AT$$

Je dis alors que KI est la racine carrée approchée de AC . L'erreur commise par ce calcul est RI^2 .



[En effet,]

$$KR.(2.RI) = BC \quad \text{et} \quad RI^2 = AT \quad \text{et} \quad KR^2 = AB$$

$$D'où \quad KI^2 = [(KR + RI)^2 = KR^2 + 2KR.RI + RI^2] = TC = AC + RI^2.$$

C'est ce que nous voulions démontrer.

[Remarque 3]

Pour obtenir une meilleure approximation il suffit de choisir le carré $[AB]$ un nombre fractionnaire qui soit très proche du nombre [dont on veut calculer la racine].

Exemple

$$\sqrt{20} = ?$$

[En appliquant la formule (2) de la proposition 1 on trouve] le carré le plus proche de 20 est égal à :

$$\left(20 + \frac{1}{4}\right) = \left(4 + \frac{1}{2}\right)^2.$$

$$\left(4 + \frac{1}{2}\right) - \frac{\left(20 + \frac{1}{4}\right) - 20}{2\left(4 + \frac{1}{2}\right)} = 4 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{9}\right) = 4 + \frac{4}{9} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{9}\right)$$

$$\sqrt{20} \approx 4 + \frac{4}{9} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{9}\right).$$

$$\left(4 + \frac{4}{9} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{9}\right)\right)^2 = 20 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{8}\left(\frac{1}{9}\right)\right) \text{ est plus proche [du nombre 20] que } \left(20 + \frac{1}{4}\right).$$

On peut prendre un autre nombre carré plus proche comme $\left[4 + \frac{4}{9} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{9}\right)\right]$ par exemple] et appliquer la même formule afin d'obtenir une valeur plus précise.

Problème

$$\sqrt{14} ?$$

On a $14 = 16 - 2$ d'où $\sqrt{14} \approx 4 - \frac{4^2 - 14}{2 \cdot 4} = 3 + \frac{6}{8}$

[Proposition 2]

$$\sqrt{A} = \frac{\sqrt{A \cdot b^2}}{b} \quad 3$$

[Remarque 4]

Si A est un nombre fractionnaire on choisit b^2 tel que $(A \cdot b^2)$ soit un nombre entier.

[Si on pose $A = \frac{C}{D}$] on choisit $b^2 = D^2$.

Problème

$$\sqrt{3 + \frac{7}{8} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{8} \right)} = ?$$

Nous avons $3 + \frac{7}{8} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{8} \right) = \frac{3 \cdot 16 + 7 \cdot 2 + 1}{2 \cdot 8} = \frac{63}{2 \cdot 8}$

En appliquant la proposition 1, on calcule $\sqrt{63 \cdot (2 \cdot 8)} = \sqrt{1008}$. Ainsi on aura :

$$\sqrt{3 + \frac{7}{8} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{8} \right)} = \frac{\sqrt{1008}}{2 \cdot 8}$$

Car $63 \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{8} \right) \right) = 1008 \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{8} \right) \right) \right)$ d'où $\frac{\sqrt{1008}}{2 \cdot 8} = \sqrt{1008 \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{8} \right) \right) \right)}$

L'extraction des racines cubiques [des nombres non cubes] ⁴

[Remarque 5]

Les nombres cubes consécutifs sont 1, 8, 27, 64...⁵. Il n'existe pas de nombres cubes entre deux cubes consécutifs car les racines des nombres cubes consécutifs s'excèdent de un.

35 n'est pas un nombre cube

En effet, si le nombre 35 admettait une racine cubique nous aurons :

$$3 < \sqrt[3]{35} < 4, \text{ or il n'y a pas d'entiers entre 3 et 4.}$$

Si on pose $\sqrt[3]{35} = 3 + \frac{u}{v}$, nous prouverons comme pour la racine carrée de dix que ce cas est impossible.

Problème

$$\sqrt[3]{70} = ?$$

³- L'auteur a précisé qu'il faudrait choisir b^2 très grand.

⁴- L'auteur a intitulé cette deuxième étude comme suit : *Sur l'extraction des racines cubiques [des nombres] sourds par approximation.*

⁵- Les nombres cubes consécutifs sont : $n^3, (n+1)^3, (n+2)^3 \dots$. Pour $n=1$ nous retrouvons la suite des cubes énoncés dans le texte.

[Proposition 3]⁶

[Pour tout nombre non cube A nous avons $n^3 < A < (n+1)^3$ et

$$\sqrt[3]{A} \approx n + \sqrt{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{3n^2}{3n+1}\right)\right)^2 + \frac{A-n^3}{3n+1} - \frac{1}{2}\left(\frac{3n^2}{3n+1}\right)}$$

Preuve

Soient $70 = AH = AB + BH = 64 + 6$ avec $AB = KI^3 = 4^3$ et posons $KS = \sqrt[3]{AH}$



$$KS^3 = KI^3 + IS^3 + 3KI^2 \cdot IS + 3KI \cdot IS^2 \text{ . Formule déjà prouvée.}$$

On a $3KI^2 = 48$, $3KI = 12$ par conséquent $KS^2 = AH = KI^3 + 48IS + 12IS^2 + IS^3$

$$AH - KI^3 = BH = IS^3 + 48IS + 12IS^2 = 6$$

Posons $IS^3 \approx IS^2$ alors $BH = (3KI+1)IS^2 + 3KI^2 \cdot IS$

$$[D'où l'équation] \quad IS^2 + \frac{3KI^2}{3KI+1} \cdot IS = \frac{BH}{3KI+1} \quad (1)$$

Dans le cas de l'exemple traité nous aurons : $IS^2 + \frac{48}{13} IS = \frac{BH}{13} = \frac{6}{13}$

En posant $SR = \frac{3KI^2}{3KI+1}$ on obtient $IS^2 + IS \cdot SR = \frac{BH}{3KI+1}$ et $IS^2 + IS \cdot SR = IS \cdot IR$

En posant F le milieu du segment SR auquel est rajouté le segment IS , nous aurons :

$$[d'après (E,II,6)] \quad (SR + IS)IS + \left(\frac{SR}{2}\right)^2 = \left(\frac{SR}{2} + IS\right)^2 \text{ et } (SR + IS)IS \left[= \frac{BH}{3KI+1}\right] = \frac{6}{13}$$

$$D'où \quad \left(\frac{SR}{2} + IS\right)^2 = \left[\frac{BH}{3KI+1} + \left(\frac{SR}{2}\right)^2\right] = \frac{6}{13} + \left(\frac{SR}{2}\right)^2 = 3 + \frac{11}{13} + \frac{5}{13} \left(\frac{1}{13}\right).$$

En appliquant les règles d'approximation de la racine carrée on obtient une valeur approximative de la quantité IS :

$$IS = \sqrt{\frac{BH}{3KI+1} + \left(\frac{SR}{2}\right)^2} - \left(\frac{SR}{2}\right) \left[= \sqrt{\frac{BH}{3KI+1} + \frac{1}{2}\left(\frac{3KI^2}{3KI+1}\right)^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{3KI^2}{3KI+1}\right)\right]$$

⁴ L'énoncé de la proposition ainsi que la preuve ont été formulées à partir de l'exemple qui a été traité c'est-à-dire le calcul de $\sqrt[3]{70}$.

$$IS \approx 1 + \frac{12}{13} + \frac{5}{10} \left(\frac{1}{13} \right) + \frac{4}{5} \left(\frac{1}{10} \left(\frac{1}{13} \right) \right) - \left(1 + \frac{11}{13} \right) = \frac{1}{13} + \frac{5}{10} \left(\frac{1}{13} \right) + \frac{4}{5} \left(\frac{1}{10} \left(\frac{1}{13} \right) \right)$$

$$\text{D'où } KS = \sqrt[3]{AH} \approx 4 + \frac{1}{13} + \frac{5}{10} \left(\frac{1}{13} \right) + \frac{4}{5} \left(\frac{1}{10} \left(\frac{1}{13} \right) \right)$$

[Remarque 6]

[Deux erreurs sont commises à travers ce procédé] : la première au niveau de l'étape où nous avons utilisé $IS^3 \approx IS^2$. La deuxième lors du calcul de la racine [carrée du nombre $\left(\frac{BH}{3KI+1} + \left(\frac{SR}{2} \right)^2 \right)] = IF$ qui n'est pas un carré parfait.

Problème

$$\sqrt[3]{42} = ?$$

[Proposition 4⁷

$$\sqrt[3]{A} \approx (n+1) - \left[\frac{1}{2} \left(\frac{3(n+1)^2}{3(n+1)-1} \right) - \sqrt{\left[\frac{1}{2} \left(\frac{3(n+1)^2}{3(n+1)-1} \right)^2 - \frac{(n+1)^3 - A}{3(n+1)-1} \right]} \right]$$

[Preuve]

$$\text{Soient } WI = \sqrt[3]{64} [= (n+1)] = 4 \text{ et } WR = \sqrt[3]{42} [= \sqrt[3]{A}]^8$$

$$\text{Nous avons alors: } WI^2 + RI^2 - 2WI.RI = WR^2 [= (WI - RI)^2 = ((n+1) - q)^2]$$

$$\text{Nous posons : } WI^2 = LF \text{ et } RI^2 = LK \text{ d'où } KF = WI^2 + RI^2 .$$

$$\text{Et, } HF = IR.(2IW) \text{ d'où } KH = WR^2$$



$$WR.KH = WR^3 = 42 [= A] \text{ et } WI.KF = WI(LF + LK) = WI.LF + WI.LK$$

$$WI.KF = 64 + IR^2 . IW = 64 + 4IR^9 .$$

$$RI.HF = RI^2(2IW) = 8IR^2 \text{ et } WI.KF + RI.HF = 64 + 12IR^2^{10} .$$

⁵ - La preuve ainsi que la formulation de la proposition 4 ont été énoncées à partir de l'exemple traité c'est-à-dire le calcul de $\sqrt[3]{42}$.

⁶ - L'auteur s'est proposé de calculer par étapes $A = ((n+1) - q)^3$ après avoir posé : $\sqrt[3]{A} = (n+1) - q = WR$. Pour cela, il a commencé par : $((n+1) - q)^2 = (n+1)^2 + q^2 - q(2(n+1))$

⁹ - Dans cette deuxième étape, il a calculé $(n+1)((n+1)^2 + q^2) = (n+1)^3 + (n+1)q^2$

Par conséquent, $64 + 12IR^2 = 42 + WI.HF + IR.KF$ ¹¹.

$$WI.HF = 4(IR.8) = 32IR \quad \text{et} \quad IR.LK = IR^3$$

$$\text{D'où } IR^3 + 48IR = 12IR^2 + 22 \dots\dots (1)$$

$$\text{En posant } IR^3 \approx IR^2, \text{ [l'équation (1)] se ramène à } 11IR^2 + 22 = 48IR \dots\dots(2)$$

$$(2) \text{ se ramène elle aussi après division par le nombre 11 à } IR^2 + 2 = \left(4 + \frac{4}{11}\right)IR \dots\dots(3)^{12}.$$

On pose $RT = 4 + \frac{4}{11}$ et on vérifie que $IR.RT = IR^2 + IT.IR$.

Par conséquent, $IR.IT = 2$

Soit D le milieu de RT qui vérifie $RD = 2 + \frac{2}{11}$ et $RD^2 = 4 + \frac{8}{11} + \frac{4}{11}\left(\frac{1}{11}\right)$.

[D'après (E, II, 5) nous avons :]

$$RD^2 - RI.IT = ID^2 = 2 + \frac{8}{11} + \frac{4}{11}\left(\frac{1}{11}\right) \quad \text{et} \quad ID = 1 + \frac{7}{11} + \frac{2}{9}\left(\frac{1}{11}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{9}\left(\frac{1}{11}\right)\right).$$

$$\text{On a également } RD - ID = RI = \frac{5}{11} + \frac{6}{9} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{9}\left(\frac{1}{11}\right)\right).$$

$$\text{D'où } WR = WI - RI = 4 - RI = 3 + \frac{5}{11} + \frac{2}{9} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{9}\left(\frac{1}{11}\right)\right)^{13}.$$

[Remarque 7]

En appliquant ce procédé d'approximation nous aurons commis deux erreurs : la première au niveau de l'utilisation de $IR^3 \approx IR^2$ et la seconde lors de la résolution de l'équation du second degré.

[Proposition 5]

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{\frac{a}{b}(kb)^3}}{kb}$$

Il faudrait choisir (kb) assez grand pour avoir une meilleure précision de la valeur [du nombre $\sqrt[3]{\frac{a}{b}}$].

¹⁰ - Dans cette troisième étape l'auteur a calculé $(n+1)^3 + 3(n+1).q^2$.

¹¹ - Comme dans le cas précédent, l'auteur n'a pas utilisé directement la formule du binôme $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ mais il a appliqué l'égalité $(a-b)^3 = (a-b)^2(a-b)$ c'est à dire $a(a^2 + b^2) + 2ab^2 = (a-b)^3 + 2a^2b + b(a^2 + b^2)$.

¹² - A cette étape, l'auteur a remarqué que IR vérifie $IR^2 < \left(4 + \frac{4}{11}\right)$.

¹³ - Pour résoudre l'équation du second degré (3), l'auteur s'est référé au livre II d'Euclide et plus précisément (E,II,5) mais sans le mentionner.

Exemple

$$\sqrt[3]{50 + \frac{1}{2}} ?$$

On a $64 = 4^3 = (2.2)^3$, 2 étant le dénominateur de la fraction.

$$\sqrt[3]{(50 + \frac{1}{2}).64} = \sqrt[3]{3232} \approx 14 + \frac{7}{9} \quad \text{et} \quad \sqrt[3]{50 + \frac{1}{2}} \approx \frac{14 + \frac{7}{9}}{4} = 3 + \frac{6}{9} + \frac{1}{4}(\frac{1}{9})$$

Vérification

$$\left(3 + \frac{6}{9} + \frac{1}{4}(\frac{1}{9})\right)^2 = 40 + \frac{2}{9} + \frac{7}{9}(\frac{1}{9}) + \frac{3}{9}(\frac{1}{9}(\frac{1}{9})) + \frac{7}{8}(\frac{1}{9}(\frac{1}{9}(\frac{1}{9}))) + \frac{4}{8}(\frac{1}{8}(\frac{1}{9}(\frac{1}{9}(\frac{1}{9}))))$$

Le nombre $50 - \left(3 + \frac{6}{9} + \frac{1}{4}(\frac{1}{9})\right)^2$ représente l'erreur de cette approximation

Preuve [de la proposition 5]

[Elle est basée sur l'exemple suivant:]

$$\sqrt[3]{7 + \frac{7}{10} + \left(\frac{2}{3}(\frac{1}{10})\right)} ?$$

$$7 + \frac{7}{10} + \frac{2}{3}(\frac{1}{10}) = \frac{233}{10.3}. \text{ Par conséquent,}$$

$$\sqrt[3]{7 + \frac{7}{10} + \frac{2}{3}(\frac{1}{10})} = \frac{\sqrt[3]{233.10^2.3^2}}{10.3} \quad \text{car} \quad \frac{a}{b} = \frac{ab^2}{b^3} \quad \text{et} \quad \sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{ab^2}}{b}$$

III- 1. 3. Edition et analyse mathématique d'une section du
Ḥaṭṭ an-niqāb ba'âda raf'ô al-ḥijāb 'an wujūh a'ômāl al-ḥisāb
d'Ibn Zakariyyā al-Gharnāṭī
Ms. Tunis, B.N, n°561
ff. 49a-60b

[51ظ] // قوله "وإن بقي شيء فسمه من ضعف الجذر الصحيح" هذه كيفية العمل في استخراج الجذر غير المنطق. وهو لا يكون إلا بتقريب ولا يمكن فيه تحقيق بوجه.

(مقدمة 1) وعلّة ذلك ظاهرة فإن العشرة فإن العشرة مثلا ليس لها جذر. ولو كان للزم أن يكون أكثر من ثلاثة وأقل من أربعة. وليس بين الثلاثة والأربعة عدد صحيح. فإن قلت لعله ثلاثة وكسر. فإن قلت لعله ثلاثة وكسر، فالجواب أن ذلك أيضا لا يمكن، لأنك إذا بسطت الثلاثة مع الكسر الزائد كان الخارج من البسط هو العدد الذي قسم على الأئمة فخرج الصحيح وبقي الكسر على الأئمة التي الكسر الزائد جزء منها، فالأئمة [52و] // لا تعد ذلك البسط. وكان يجب على قولك إذا ضرب البسط في مثله وقسمته على ضرب الأئمة في مثلها أن تخرج العشرة ولا يبقى كسر زائد وهو قد بقي. فالعشرة لا جذر لها بتحقيق أصلا.

ولما كانت الحاجة تدعو إلى استخراج هذا النوع من الجذور لضرورة الناس إليه في المساحات والمعاملات وسائر التعاليم وغير ذلك ذكره أهل هذه الصناعة واستنبطوا لاستخراجه أعمالا حسانا صحيحة العلة والبرهان حسبما تراه بعد مقدمة في ذلك:

(مقدمة 2)

(1) كل عدد لا جذر له فهو واقع بين مربعين متوالين أحدهما أصغر منه والآخر أكبر منه.

مثل ستة بين أربعة وتسعة.

(2) وكل مربعين متوالين فإن بين جذريهما واحد أبدا.

مثل إثنتين وثلاثة جذرا أربعة وتسعة.

(3) وفضل ما بين المربعين مثل جذري أصغرهما وواحد. وهو أيضا مثل جذري أكبرهما إلا واحدا. وهو أيضا مثل مجموع الجذرين. وذلك بين من ضرب جذر الأكبر في مثله بعد قسمته إلى جذر الأصغر وواحد.

(مبرهنة 1) إذا تقرر هذا فاستخراج جذر العدد غير المنطق يكون من جهة المربع القريب إليه أبدا، سواء كان أكبر منه أو أصغر، فقولته "إن كان مثل الجذر أو أقل" يعني فحينئذ يسمى الباقي من ضعف الجذر فهو غاية الكلام.

ومثال ذلك إذا كان الباقي مثل الجذر وأردت استخراج من جهة المربع الأصغر لو قيل كم جذر عشرين؟ فتعلم أن هذا العدد ليس له جذر منطلق لأن في أوله صفر فرد. وتجد المربع الأصغر ستة عشر وجذرها أربعة. فيبقى من العشرين أربعة تسميها من ضعف الأربعة يخرج في التسمية نصف تزيده على الأربعة جذر الأصغر يجتمع أربعة ونصف وهو جذر العشرين بتقريب.

ومثاله إذا كان الباقي أقل من الجذر وأردت استخراج من جهة المربع الأكبر لو قيل كم جذر أحد وثلثين؟ فتجد المربع الأكبر القريب إليه ستة وثلثين، جذرها ستة، وبين العددين خمسة ناقصة وهي أقل. تسميها من ضعف الستة يخرج في التسمية سدسان ونصف سدس. تنقصها من الستة، جذر الأكبر، يبقى خمسة وثلثة أسداس ونصف سدس وهو الجذر المطلوب.

(البرهان)

1- علة استخراج من جهة الأصغر أن جذر العدد ينقسم بقسمين جذر الأصغر وكسر. وضرب ذلك في مثله كضرب [52ظ] // كل واحد في نفسه وأحدهما في ضعف الثاني، فتكون الفضلة بين العدد والمربع الأصغر مثل مربع الكسر وضرب الكسر في ضعف جذر الأصغر.

فيتسامح بإسقاط مربع الكسر وتجعل الفضلة مثل ضرب الكسر في ضعف جذر الأصغر. فتقسم الفضلة على ضعف الأصغر يخرج منه الكسر بتقريب. ومن البين أن هذا الكسر الخارج أعظم من الكسر الحقيقي فلا يكون التقريب أبداً إلا زائداً على العدد المطلوب جذره.

2- علته من جهة الأكبر أن جذر المربع الأكبر مقسوم بجذر العدد وكسر. وضربه في مثله كضرب كل قسم منهما في مثله وأحدهما في ضعف الثاني. فتكون الفضلة مثل مربع الكسر وضرب الكسر في ضعف جذر العدد. فيقع التسامح بزيادة مربع الكسر، فيكون المجتمع مثل ضرب الكسر في ضعف جذر المربع على ما تقدم في النوع الأخير من أنواع الضرب بالتثقيب: إذ جعل أحد المضروبين للكسر والثاني جذر الأكبر. فتجعل الفضلة مثل ضرب الكسر في ضعف جذر المربع فيخرج الكسر بتقريب وهو أصغر من الكسر الحقيقي. فإذا طرح من جذر المربع الأكبر بقي جذر العدد بتقريب زائد أبداً.

10 (ميرهنة 2) قوله "وإن كان أكثر من الجذر فزد فيه واحداً وفي الجذر المضاعف إثنين ثم تسمى منه" إلى آخره: يعني وإن كان الباقي أكثر من الجذر الذي خرج صحيحاً.

مثاله لو قيل كم جذر إثنين وتسعين؟

فتعمل على ما تقدم يخرج الجذر الصحيح تسعة ويبقى أحد عشر وهي أكثر من التسعة. فتزيد فيها واحداً تصير إثني عشر وفي ضعف الجذر إثنين يصير عشرين فتسمى منها الإثني عشر يكون ثلاثة أخماس تزيدها على الجذر. فما كان وذلك تسعة وثلاثة أخماس فهو الجذر المطلوب بتقريب. فإذا ضربته في مثله خرج من الضرب إثنان وتسعون وأربعة أخماس الخمس. فقد وقع التقريب بهذا الكسر الزائد. هذا الذي نبه عليه من تنويع العمل في تسمية الباقي هو الصواب الذي لا ينبغي أن يعدل عنه ولا يطرد القانون إلا به. إذ هو لازم.

(ملاحظة 1)

20 1- متى كان العدد المطلوب جذره أقل من مربع العدد الذي يلي الجذر بواحد فإن الباقي حينئذ يكون مثل ضعف لجذر فلا يئآتى تسميته منه.

مثاله مائة وثمانية وستون؟

الجذر الصحيح فيه إثني عشر والباقي أربعة وعشرون [53] // مثل ضعف الجذر. وهذا العدد مثل مربع ثلاثة عشر إلا واحداً يلزم فيه أن يزداد في الباقي واحد وفي ضعف الجذر إثنان. فإطلاق أكثر العددين أن تسمية الباقي يكون من ضعف الجذر فاعلمه.

2- علة زيادة الواحد في الفضلة والإثنين في ضعف الجذر ظاهرة: وذلك أن نقصان الكسر من جذر الأكبر مثل نقصان الفضلة من ضعف جذر الأكبر وتسمية الباقي من ضعف جذر الأكبر وزيادة التسمية على جذر الأصغر وذلك ظاهر من طرح الكسور. لكن الباقي من بعد طرح الفضلة من ضعف الجذر الأكبر هو مثل الفضلة التي بين عددك والمربع الأصغر وزيادة واحد، لأن بين المربعين ضعف جذر أكبرهما إلا واحداً كما تقدم.

30 فلهذا إذا كان الباقي من عددك أكثر من الجذر فهو أقرب إلى المربع الأكبر. فتزيد في ضعف الجذر إثنين ليكون ضعف جذر الأكبر وتزيد في الفضلة واحداً لتكون هي الفضلة الباقية بعد طرح فضلة المربع الأكبر على عددك من ضعف جذره. وتزيد التسمية على جذر الأصغر كما بيناه.

3- ويلزم منه أنه إذا كانت فضلة المربع الأكبر أعظم من جذره تنقص منها واحداً ومن ضعف الجذر الأكبر

7- بالتثقيب: بلا تثقيب // 24- فإطلاق أكثر العددين أن تسمية الباقي يكون من ضعف الجذر فاعلمه: جملة غير واضحة.

إثنين أبداً وحينئذ تسمى وتنقص التسمية من الجذر الأكبر.

مثل لو قيل كم جذر تسعة وثمانين؟

واستخرجته من جهة المربع الأكبر وذلك مائة فاعلمه.

4- ومن البين أن الفضلة إذا كانت مثل الجذر فالفضلة الأخرى مثل الجذر الآخر. والعدد وسط بين المربعين

5 وهو وسط في النسبة : نسبة الأصغر إليه كنسبته إلى الأكبر.

مثل لو قيل كم جذر ثلاثين؟

(مبرهنة 3) قوله "وإن أردت تدقيق التقريب فسمه من ضعف الجذر" على آخره. الضمير المفعول عائد على

الكسر الزائد الواقع به التقريب في الوجه قبل هذا. لأن أخذ الجذر بالتقريب على هذا الوجه الثاني يكون من قبل

المربع الأكبر وذلك مفهوم من قوله "واسقط الخارج من الجذر".

10 مثال منه لو قيل كم جذر ثمانية وستين؟

وعملت في أخذه بالوجه الأول لكان الخارج المقرب ثمانية وربعا. ومربعه ثمانية وستون ونصف ثمن. فهذا

المربع هو الأكبر وهو أقرب للثمانية والستين من المربع الأول. فتعمل به بأن تأخذ الكسر الزائد [53ظ] // فيه

وهو نصف ثمن وتسميه من ضعف جذره وذلك ستة عشر ونصف. يخرج في التسمية ثلث ثمن الجزء من أحد

عشر، فتسقطه من جذر المربع يبقى منه ثمانية وخمسة أسداس ربع وعشرة أجزاء من أحد عشر من سدس ربع

15 وهو الجذر المقرب وصورته $8 \frac{10}{11} \frac{5}{6} \frac{1}{4}$. فإذا ضربت هذا الجذر في نفسه خرج بعد تهذيب الأئمة

ثمانية وستون وثلث ربع سدس الجزء من أحد عشر في الجزء من أحد عشر على هذه الصورة

68 $\frac{1}{3} \frac{1}{4} \frac{1}{6} \frac{1}{11} \frac{1}{11}$. فقد ضعف التقريب جدا كما ترى. وإن عملت أيضا بهذا المربع الثالث صار

التقريب أدق بكثير.

(مبرهنة 4) ثم قال "وفي التقريب وجه آخر" إلى آخر كلامه.

20 مثال منه لو قيل كم جذر إثني عشر؟

فتضربها في ستة عشر مثلا يكون الخارج إثني عشر وتسعين ومائة. تأخذ جذره كما تقدم يكون ثلاثة عشر وستة

أسباع، تقسمه على جذر الستة عشر والخارج من القسمة وذلك ثلاثة وثلاثة أسباع وربع سبع هو الجذر المقرب

والتقريب فيه ربع ربع سبع سبع.

(ملاحظة 1)

25 1- ومهما أردت أن يكون التقريب أدق جعلت المربع الذي تضرب فيه أكبر.

2- وينتفع بهذا الوجه الثالث أصحاب التعديل في أخذ جذور الدرج والدقائق فإنها تصرف إلى الثواني والروابع

ويؤخذ جذرها. لأن الثواني أجزاء من ستين من الدرجة. فتصرف الدرج إلى الثواني يحصل منه ضربها في

مربع ستين.

3- وبهذا يؤخذ جذر الكسور : يضرب في مربع إمامها فيخرج ضرب البسط في الإمام. فيقسم جذره على

30 الإمام فافهم. واختص الكسر والدرج والدقائق بذلك لأنه أقرب فيهما تدقيقا من الذي قبله ولكن لا بد فيه من العمل

الأول فهو الاصل.

(البرهان) وعلّة هذا الوجه الثالث هو أن ضرب عدد في عدد وأخذ جذر الخارج كضرب جذر أحدهما في جذر

الثاني. فأنت إذا ضربت عددك المفروض في المربع وأخذت جذر الخارج خرج لك ضرب جذر أحدهما في

جذر الثاني فتقسمه على جذر المربع يخرج جذر عددك فافهم.

4- واعلم أن العمل بالحل لا يتصرف في استخراج الجذر بالتقريب إلا بشرط أن يكون العدد المطلوب جذره بنحل إلى عددين [54] // بينهما واحد فإن الجذر يكون نصف مجموعهما لأنه العدد الوسط بين المربعين. وفيه وجه خامس (مبرهنة 5) تضرب العدد المطلوب جذره في مربع كبير والخارج تسقط منه واحدا وتأخذ جذر الباقي وتقسمه على جذر المربع المضروب فيه والخارج من القسمة هو المطلوب.

5 (مبرهنة 6) تأخذ الفضلة التي بين العدد المفروض وبين أحد المربعين الذين يليانه قبله وبعده وتسميها من الفضلة بين المربعين. وتزيد التسمية على جذر المربع الأصغر إن كان عمك به أو تنقصها من جذر الأكبر إن كان عمك به. فما كان بعد الزيادة أو النقصان فهو الجذر المطلوب.

واختبار الجذر المقرب بالطرح : تطرح صحيح الخارج والباقي تضربه في نفسه ثم تطرحه وتحمل باقيه على ما يبقى من طرح بسط كسر الخارج والمجتمع تطرحه وتقابل بباقيه الباقي من طرح العدد المؤخوذ جذره.

10 مثاله لو أخذت جذر مائة وتسعة وأربعين؟
لخرج إثنا عشر. فيبقى من طرح إثني عشر خمسة. تضربها في نفسها بخمسة وعشرين يبقى منها أربعة 4. والبسط خمسة فذلك تسعة يبقى منها إثنا عشر مثل ما يبقى من العدد المؤخوذ جذره فافهم 54 ظ // وقس عليه.

2- بين المربعين. وفيه وجه خامس: بين المربعين. وفي استخراج الجذر المقرب وجه رابع ذكره الأستاذ أبي عبد الله بن حي الوادي أشي قال (ملاحظة 2) " أن كل جذر بتقريب لا يخلو من صحيح وكسر فتضرب أبدا العدد الصحيح في إثنين وهذه الإثنان هي التي تقدم من تضعيف الجذر التي تسمى منه ما تزيد مسألتك على العدد المجذور أو تنقص عنه حسبما عرفت. ثم تزيد إلى الخارج من ضرب العدد الصحيح في الإثنين المذكورين ما على المقام من الكسر وتتخذ المجموع إماما وتسمي منه ذلك الكسر. ثم ترد مقام الكسر الأول تحت المقام الذي قام من ضرب الصحيح في الإثنين وزيادة الكسر إليه وتنسبه إليه وترد عليه ذلك الكسر. فإن كان الكسر أقل من إثنين تركت ذلك على حاله وكان الجذر بتقريب يسير جدا. وإن كان مساويا للإثنين زدت واحدا في ذلك الكسر المنسوب للأول. وإن كان أكثر من إثنين زدت لكل واحد من الزيادة واحدا في ذلك الكسر المضاعف وأقيت كسر الأول على حاله يأتيك الجذر بتقريب يسير" انتهى وفيه نظر. وفيه وجه خامس.

[57ظ] // وأما القسم الثاني من ضلع المكعب وهو غير منطوق

فاستخراجه يكون من قبل المكعب القريب إليه أبداً، سواء كان أكبر منه أو أصغر. ونقدم في ذلك مقدمة ينتفع بها فيه وقد تقدم التنبية على أن الضرورة داعية إليه في المساحات وما جانسها.

(مقدمة)

5 (1) اعلم أنه لما كانت المكعبات من الأعداد الصحيحة إنما هي المتوالية : الواحد ثم الثمانية ثم السبعة والعشرون ما نهضت. وكانت أضلاعها أبداً تتفاضل بواحد واحد لزم من ذلك أن ما بين كل مكعبين من هذه المكعبات المتوالية غير مكعب.

(مثال) فإن الخمسة عشر مثلاً لو كان لها ضلع تكعيب للزم أن يكون أكثر من إثنين وأقل من ثلاثة، وليس بين الإثنين والثلاثة عدد صحيح. فإن قلت هو إثنان وكسر، قلنا في ذلك على النحو الذي تقدم في الجذر غير

10 المنطوق. فلأجل ذلك متى أردنا استخراج ضلع تكعيب الخمسة عشر فإنما يخرج على التقريب لا على التحقيق بحسب ما يأتي.

(2) فكل عدد غير مكعب فهو واقع أبداً بين عددين مكعبين متواليين أحدهما أصغر منه والآخر أكبر منه.

(3) وكل مكعبين متواليين فإن بين ضلعي مكعبيهما واحد أبداً. ويلزم من ذلك أن فضل ما بين المكعبين أبداً مثل مجموع مربع ضلع الأصغر منهما إلى المسطح الكائن من ضرب مجموع ضلعي الأصغر أيضاً مزيداً على ذلك واحد في ضلع الأصغر مزيداً عليه واحد. وهو أيضاً مثل مجموع مربع ضلع الأكبر منهما إلى المسطح الكائن من ضرب مجموع ضلعي الأكبر أيضاً منقوصاً من ذلك واحد في ضلع الأكبر منقوصاً منه واحد. فالفضلات التي بين المكعبات المتوالية أفراد أبداً.

(4) يتبين لك من هذا متى [58و] // أردت أن تعرف في كل عدد مفروض إلى أي المكعبين اللذين يليانه أقرب أن تسقط من الفضل بين المكعبين واحداً وتحفظ نصف الباقي. فإن كان العدد المفروض يزيد على

20 المكعب الأصغر مقدار هذا النصف المحفوظ أو أقل فهو أقرب إليه وإن زاد عليه أكثر من ذلك فهو أبعد منه.

إذا تقرر هذا وأردت أخذ ضلع تكعيب عدد مفروض فلا يخلو أن يكون أقرب مكعب إليه أصغر منه أو أكبر.

(مبرهنة 1) فإن كان أصغر منه فتقسم فضل ما بينهما على المسطح الكائن من ضرب ضلع المكعب في ثلاثة أبداً مزيداً على ذلك واحد والخارج تحفظه. ثم تقسم على ذلك المسطح مع زيادة الواحد أيضاً مسطح مربع ضلع المكعب في ثلاثة، والخارج تزيد مربع نصفه على المحفوظ وتأخذ جذر المجتمع وتنقص منه التصنيف. والباقي تحمله ضلع المكعب يكون ضلع تكعيب العدد المفروض.

مثاله لو قيل لك سبعون كم ضلعها؟

فتجد أقرب مكعب إليها أربعة وستين. فتقسم فضل ما بينهما، وذلك ستة، على مسطح ضلع الأربعة والستين وهو أربعة في ثلاثة مع زيادة واحد، فذلك ثلاثة عشر يخرج لك في القسمة ستة أجزاء من ثلاثة عشر تحفظها.

ثم تقسم على الثلاثة عشر أيضاً ما يجتمع من ضرب مربع الأربعة في ثلاثة وذلك ثمانية وأربعون، يخرج ثلاثة وتسعة أجزاء من ثلاثة عشر. فتأخذ نصفها يكون واحداً وأحد عشر جزءاً من ثلاثة عشر. تضربه في مثله

30 بثلاثة وخمسة أجزاء من ثلاثة عشر وأربعة أجزاء من ثلاثة في الجزء من ثلاثة عشر. فتزيد على ذلك المربع ستة الأجزاء المحفوظة وتأخذ جذر المجتمع بالتقريب على ما يأتي يكون واحداً واثنى عشر جزءاً من ثلاثة عشر وخمسة أعشار الجزء من ثلاثة عشر وأربعة أخماس عشر الجزء من ثلاثة عشر. فتتقص منه التصنيف

الذي هو الواحد والأحد عشر جزءاً من ثلاثة عشر يبقى جزء من ثلاثة عشر وخمسة أعشار الجزء من ثلاثة عشر

عشر وأربعة أخماس عشر الجزء من ثلاثة عشر. تحمله على الأربعة التي هي ضلع الأربعة والستين والمجتمع هو ضلع السبعين العدد المفروض.

(ملاحظة) واعلم أن التقريب في استخراج أضلاع المكعبات الصم أكثر من التقريب في استخراج أضلاع المربعات الصم. وقرب الجذر بالتقريب من الحقيقة أكثر من قرب ضلع المكعب. ومن أراد الوقوف [58ظ] //

على علة ذلك كله وبرهانه فينظره في آخر كتاب الكامل للحصار وفي فقه الحساب لابن منعم. (مبرهنة 2) وأما إن كان أقرب مكعب للعدد المفروض أكبر منه فيقسم فضل ما بينهما على مسطح ضلع المكعب في ثلاثة منقوصا منه واحد وتحفظ الخارج. ثم تقسم على المسطح أيضا ما يخرج من ضرب مربع ضلع المكعب في ثلاثة والخارج تسقطه من مربع نصف ما حفظت أولا وتأخذ جذر الباقي وتتقصه من التنصيف. وما بقي تسقطه من ضلع المكعب يبقى ضلع العدد المفروض.

مثاله لو قيل إثنان وأربعون كم ضلعها؟

فتجد أقرب مكعب إليها أكبر منها أربعة وستون. فتقسم فضل ما بينهما، وذلك إثنان وعشرون، على مسطح الأربعة، ضلع المكعب، في ثلاثة منقوصا منه واحد فذلك أحد عشر يخرج لك في القسمة إثنان تحفظها. ثم تقسم على هذه الأحد عشر أيضا مسطح ثلاثة في مربع الأربعة، وذلك ثمانية وأربعون، يخرج لك أربعة وأربعة أجزاء من أحد عشر. فتأخذ نصف هذا الخارج بإثنين وجزئين من أحد عشر وتسقط من مربعه الإثنين، التي حفظت، والباقي وذلك إثنان وثمانية أجزاء من أحد عشر وأربعة أجزاء من أحد عشر في الجزء من أحد عشر. تأخذ جذره بتقريب يكون واحدا وسبعة أجزاء من أحد عشر وتسعين ونصف تسع الجزء من أحد عشر. فتسقط هذا الجذر من التنصيف، الذي هو إثنان وجزآن من أحد عشر، يبقى خمسة أجزاء من أحد عشر وستة أضع ونصف تسع الجزء من أحد عشر. يسقط هذا الباقي من الأربعة، ضلع المكعب، يبقى ثلاثة وخمسة أجزاء من حد عشر وتسعان ونصف تسع الجزء من أحد عشر وذلك هو ضلع الإثنين والأربعين بتقريب. فإذا كعبته خرج منه فقد وقع التقريب بالكسر الزائد.

(مبرهنة 3) وإن أردت تدقيق التقريب في التكعيب فافعل فيه على نحو ما تقدم في التجدير: إما أن تضرب العدد المفروض في مكعب كبير وتأخذ كعب الخارج وتقسمه على كعب المكعب المضروب فيه. وإما إذا خرج لك الجواب أن تأخذ كعبه الحقيقي وتجعله كأنه تكعيب وتقسمه على كعب المكعب المضروب فيه وحينئذ يكون أقرب من المكعب الأول الذي يخرج لك. إن أردت تدقيقه فافعل فيه ما فعلت أو لا فافهم.

والعلة في استخراج ضلع المكعب القريب إليه الأصغر [59ظ] // أو الأكبر منه. والبرهان على ذلك كله قد ذكره ابن منعم وعبد الحق بن طاهر في كتابيهما ولطوله تركت ذكره هنا. مسألة في إيجاد أعداد مكعبة كم شئنا منها. لك في ذلك أوجهها منها:

(1) أن تعمد إلى عدد أي عدد شئنا بشرط أن يكون له ضلع تكعيب منطوق، فليكن مثلا ثمانية. فتضربه في عدد آخر مكعب كذلك وليكن مثلا سبعة وعشرين، فيخرج الخارج وتضعه هكذا 216. ثم تضرب الثمانية أيضا في هذا الخارج ويضع ما يخرج لنا بعده. ثم هكذا لا تزال تضرب الثمانية إلى أي عدد شئنا. وكذلك تفعل بالسبعة والعشرين والأربعة والستين وكل عدد مكعب فتنشأ الأعداد المكعبة. وعلة ذلك تفهم من أول تاسعة أوقليدس. (2) ومنها أن تضع الأفراد المتوالية من الواحد في سطر، كم شئنا منها، ثم تبدأ من الواحد فهو المكعب الأول. ثم تجمع الفردين الذين بعده يكون المكعب الثاني وهو ثمانية. ثم تجمع الأفراد الثلاثة بعد الفرد الذي وقفت فيه

22- المفروض : كلمة مضموسة // 23- تكعيب وتقسمه على كعب المكعب المضروب فيه وحينئذ يكون أقرب من المكعب الأول الذي يخرج لك : تكعيب قريب من المفروض وحينئذ يكون أقرب من المكعب الأول الذي يخرج لك.

يكون المكعب الثالث وهو سبعة وعشرون. ثم تجمع الأفراد الأربعة بعد الفرد الذي وقفت فيه في أخذ المكعب الثالث يكون المكعب الرابع وذلك أربعة وسبعون. فهكذا يكون كل مكعب يجتمع من أفراد عدتها كعدد مرتبته في المكعبات على نحو ما وصف ففتشاً المكعبات على التوالي كم شئنا منها.

وأما تجذير الكسور: (مبرهنة 4) فهو أن تضرب البسط في الإمام وتقسّم جذر الخارج على الإمام. وإن كان للبسط جذر منطوق ولالإمام مثله فاقسم جذر البسط على جذر الإمام.

هذا الفصل على ضربين: الضرب الأول أن يكون الكسر المطلوب جذره مجرد عن عدد صحيح. والضرب الثاني أن يكون مع الكسر عدد صحيح. وكل ضرب منهما يتصور فيه أربع صور: الصورة الأولى أن يكون البسط مجذورا وإمامه مجذور. الصورة الثانية عكس الأولى أن لا يكون واحد منهما مجذورا. الصورة الثالثة أن يكون البسط مجذورا والإمام غير مجذور. الصورة الرابعة عكس الثالثة. والعمل فيها كلها على وجهين:

الوجه الأول أن تأخذ جذر البسط بتحقيق إن كان منطوقاً أو بتقريب إن كان غير [59ظ] // منطوق. وتقسّمه على جذر الإمام بتحقيق في المنطوق وبتقريب في غير منطوق. الوجه الآخر أن تضرب البسط في الإمام وتقسّم جذر الخارج على الإمام. واعلم أن الوجه الأول أولى في كل صورة منطقة ولا يفيد عملها بالوجه الأخير إلا التطويل. والوجه الأخير أولى في كل صورة غير منطقة لأنه يكون أقرب.

مثال الصورة الأولى من الضرب الأول لو قيل كم جذر خمسة أثمان وربع ثم $\frac{1}{4} \frac{5}{8}$ ؟

فبالوجه الأول تأخذ جذر البسط بتقريب يكون $\frac{6}{10} 4$ وتقسّمه على جذر الإمام المأخوذ بتقريب وهو $\frac{2}{3} 5$ يخرج في القسمة ثلاثة عشر جزءاً من سبعة عشر وثمانية أعشار الجزء من سبعة عشر وهو المطلوب بتقريب زائد.

وقد يخرج المطلوب في هذه الصورة بتقريب ناقص كما لو قيل كم جذر خمسة أسباع؟

وبالوجه الثاني يضرب البسط وهو أحد وعشرون في الإمام وتأخذ جذر الخارج يكون $\frac{12}{13} 25$ تقسّمه على الإمام يخرج عشرة أجزاء من ثلاثة عشر وأربعة أثمان الجزء من ثلاثة عشر وربع ثم الجزء من ثلاثة عشر وهو الجذر المطلوب.

ومثال الصورة الثالثة لو قيل كم جذر أربعة أعشار وأربعة أثمان العشر؟

فبالوجه الأول يخرج الجذر بالتقريب خمسة عشر جزءاً من ثلاثة وعشرين وثلاثة أسباع الجزء من ثلاثة وعشرين. ويخرج بهذا الوجه في هذه الصورة بتقريب ناقص أبداً. وبالوجه الثاني يخرج ستة أعشار وخمسة أثمان العشر وثلاثة ثمن العشر. وهو يزيد على الخارج الأول ثلث سبع ثمن عشر الجزء من ثلاثة وعشرين.

ومثال الصورة الرابعة لو قيل كم جذر ثلاثة أثمان ونصف ثم؟

فبالوجه الأول يخرج الجذر ثلثين بتقريب زائد. وبالوجه الثاني يخرج سبعة أجزاء من أحد عشر وثمانية الجزء من أحد عشر وربع ثم الجزء من أحد عشر وهو أقل من الخارج الأول.

ومثال الصورة الأولى من الضرب الثاني لو قيل كم جذر سبعة وتسع؟

فتعملها بالوجه الأول يخرج الجذر إثنين وثلثين.

ومثال الصورة الثانية لو قيل كم جذر ستة وخمسة أثمان؟

فبالوجه الأول يخرج الجذر إثنين وأربعة أسباع وسدس ثمن السبع. وبالوجه الثاني يخرج إثنين وأربعة أسباع.

ومثال الصورة الثالثة لو قيل كم جذر ثلاثة وستة أعشار؟
فبالوجه الأول يخرج واحد وسبعة عشر جزءا من تسعة عشر. وبالتالي يخرج زيادة نصف عشر الجزء من تسعة عشر.

5 ومثال [60 و] // الصورة الرابعة لو قيل كم جذر ثلاثة وسبعة أثمان ونصف ثمن؟
فبالوجه الأول يخرج واحدا وسبعة أثمان وسبعة أثمان الثمن. وبالوجه الثاني يخرج واحدا وثلاثين جزءا من أحد وثلاثين وأربعة أثمان وربع ثمن الجزء من أحد وثلاثين.
وإن شئت تقرب الجذر في ذلك فاعمل كما تقدم في الصحيح.

10 وأما تكعيب الكسور ومعناه شبيهه بتكعيب الصحيح: ضرب الكسر أو العدد والكسر في مربعه وسواء كان الكسر مجردا أو يعد عدد صحيح في جميع الصور الثمان المتقدمة في التجذير فإن العمل في أخذ ضلع الكسر بوجهين على نحو التجذير: (مبرهنة 5) الوجه الواحد أن تقسم ضلع البسط المأخوذ بتحقيق في المنطق أو بتقريب في غير المنطق على ضلع الإمام المأخوذ بتحقيق في المنطق أو بتقريب في غير المنطق والخارج هو المطلوب.
الوجه الآخر أن تضرب البسط في مربع الإمام وتقسم ضلع تكعيب الخارج على الإمام.

مثال هذا لو قيل تسعان وثلاثي تسع كم ضلع تكعيبيها؟
فبالوجه الأول ينقسم ضلع البسط وذلك إثنان على ضلع الإمام وذلك ثلاثة يخرج لك ثلثان وهو ضلع التكعيب المطلوب. وبالوجه الآخر تضرب البسط وهو ثمانية في مربع الإمام وهو سبعمائة وتسعة وعشرون وتأخذ ضلع تكعيب الخارج وذلك ثمانية عشر فتقسم على الإمام يخرج ثلثان كالخارج بالأول. فالأولى في كل صورة منطقة أن تعمل بالوجه الأول كما كان ذلك في التجذير.

20 مثال ثان لو قيل أربعة أعشار وثمان عشر وثلاثة أرباع ثمن العشر كم ضلع تكعيبيها؟
فهذه صورة غير منطقة فتعمل فيها بالوجه الثاني إذ هو أولى: تضرب البسط وهو مائة وخمسة وثلاثون في ربع الإمام وهو مائة ألف وألفان وأربعمائة. وتأخذ ضلع تكعيب الخارج وذلك مائتان وأربعون فتقسمها على الإمام يخرج لك ثلاثة أرباع وهو ضلع التكعيب المطلوب.

مثال ثالث لو قيل واحد وسبعة أثمان وخمسة أثمان الثمن كم ضلعها؟
فتعمل بها بالوجه الأول إذ هي صورة منطقة: فتقسم ضلع البسط وذلك خمسة [60 ظ] // على ضلع الإمام وذلك أربعة يخرج واحد وربع وهو المطلوب.

25 وكذلك لو قيل سبعة وثلاثون وثلاث تسع كم ضلع تكعيبيها؟
لعملت فيها بالوجه الأول أيضا إذ هي صورة منطقة يخرج الضلع المطلوب ثلاثة وثلاث.

30 مثال آخر لو قيل أحد وتسعون وتسع وثمان التسع كم ضلعها؟
فتعمل فيها بالوجه الثاني : تضرب البسط وهو ستة آلاف وخمسمائة وأحد وستون في مربع الإمام وتأخذ ضلع تكعيب الخارج وذلك ثلاثمائة وأربعة وعشرون وتقسمه على الإمام يخرج أربعة ونصف وهو الضلع المطلوب.
وعلة هذا الوجه ظاهرة لمن تأمله.

وفي ذلك وجه ثالث (مبرهنة 6) وهو أن تطلب أبدا عددا مكعبا يكون فيه جزء الكسر المفروض وما كان العدد أكثر كان التقريب فيه أقل فتأخذ ضلعه وتحفظه يكون إماما. ثم تضرب المفروض في ذلك العدد المكعب وتأخذ ضلع الخارج بالتقريب في المقرب أو بالتحقيق في المحقق وتقسمه على الإمام المحفوظ والخارج هو المطلوب.

مثاله لو قيل خمسون ونصف كم ضلعها؟

فتطلب عددا مكعبا له نصف فكأنه أربعة وستون وضلعها أربعة وهو الإمام ثم تضرب الخمسين والنصف في الأربعة والستين المكعب يكون ثلاثة آلاف ومائتين واثنين وثلاثين. فتأخذ ضلعها بتقريب على ما تقدم يكون أربعة عشر وسبعة أضع تقسمها على الإمام يخرج لك ثلاثة وستة أضع وربع تسع وهو ضلع الخمسين والنصف. فافهم وقس على ذلك ما يرد عليك من نوعه والله الموفق للصواب.

5

ANALYSE MATHÉMATIQUE

[Le calcul de la racine carrée d'un nombre par des procédés d'approximation]

[Lemme 1]

La racine carrée d'un nombre qui n'est pas un carré parfait ne peut être déterminée que par approximation.]

Preuve de cela :

1- La valeur exacte du nombre $\sqrt{10}$ n'est pas connue [dans l'ensemble des entiers].

Effectivement $3 < \sqrt{10} < 4$ et il n'y a pas de nombres [entiers] entre 3 et 4 puisqu'ils sont consécutifs.

2- Si nous supposons que $\sqrt{10}$ peut s'écrire comme la somme d'un entier et d'un nombre fraction : $\sqrt{10} = 3 + \frac{p}{q}$ [avec p et q des entiers premiers entre eux qui vérifient $p < q ; q \neq 0$]

$$\text{Comme } \sqrt{10} = \frac{3q+p}{q} \text{ alors } 10 = \frac{(3q+p)^2}{q^2}$$

D'où q^2 diviserait $(3q+p)^2$

Mais q ne divise pas $(3q+p)$. La valeur de $\sqrt{10}$ n'est pas un nombre fractionnaire.

Par conséquent, $\sqrt{10}$ n'admet pas une valeur exacte.

[Lemme 2]

1- Pour tout nombre non carré A il existe un entier n qui vérifie $n^2 < A < (n+1)^2$.

Exemple

Pour $A=6$ nous avons $2^2 < 6 < 3^2$

2- Si a^2, b^2 sont deux nombres carrés consécutifs alors $|a-b|=1$

Exemple

$$\sqrt{9} - \sqrt{4} = 1.$$

3- Si a^2, b^2 sont deux nombres carrés consécutifs ($b^2 > a^2$) alors
$$\begin{cases} b^2 - a^2 = 2a + 1 \\ b^2 - a^2 = 2b - 1 \\ b^2 - a^2 = b + a \end{cases}$$

Ces égalités découlent du fait que $b^2 = (a+1)^2 = a^2 + 2a + 1$

[Proposition 1]

Pour tout nombre non carré A il existe un entier n qui vérifie $n^2 < A < (n+1)^2$ [d'après lemme 2].

1- Si nous posons $r = A - n^2$ nous aurons le résultat suivant :

$$r \leq n \quad \Rightarrow \quad \sqrt{A} \approx n + \frac{r}{2n}$$

Exemple

$\sqrt{20}$?

$$\sqrt{20} = \sqrt{4^2 + 4} \approx 4 + \frac{4}{2 \cdot 4} = 4 + \frac{1}{2}$$

2- Si nous posons $r = (n+1)^2 - A$ nous aurons le résultat suivant :

$$r \leq n \quad \Rightarrow \quad \sqrt{A} \approx (n+1) - \frac{r}{2(n+1)}$$

Exemple

$\sqrt{31}$?

$$\sqrt{31} = \sqrt{6^2 - 5} \approx 6 - \frac{5}{2 \cdot 6} = 5 - \left(\frac{2}{6} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{6} \right) \right) = 5 + \frac{3}{6} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{6} \right)$$

[Preuve]

Pour le cas $(A - n^2) < ((n+1)^2 - A)$ [c'est-à-dire $r \leq n$] nous posons $\sqrt{A} = n + \frac{p}{q}$ [avec

$$\frac{p}{q} < 1]. \text{ Ainsi, } \left(n + \frac{p}{q} \right)^2 = n^2 + \left(\frac{p}{q} \right)^2 + 2n \frac{p}{q}$$

$$\text{D'où } A - n^2 = \left(\frac{p}{q} \right)^2 + 2n \frac{p}{q}$$

En négligeant la fraction $\left(\frac{p}{q} \right)^2$ nous obtiendrons le résultat $\frac{p}{q} \approx \frac{A - n^2}{2n}$

L'erreur commise par ce calcul est par excès puisque à partir de l'égalité :

$$A - n^2 = \left(\frac{p}{q} \right)^2 + 2n \frac{p}{q} \quad \text{nous avons} \quad \frac{p}{q} \left(\frac{p}{q} + 2n \right) = A - n^2.$$

Ce qui entraîne $\frac{p}{q} = \frac{A - n^2}{\left(2n + \frac{p}{q} \right)}$ qui est la valeur réelle de la fraction.

Nous pouvons alors vérifier que $\left(\frac{A - n^2}{2n} - \frac{A - n^2}{\left(2n + \frac{p}{q} \right)} \right) > 0$

Pour le cas $(A - n^2) > ((n+1)^2 - A)$ [c'est-à-dire $r > n$] nous posons $(n+1) = \sqrt{A} + \frac{p}{q}$

[avec $\frac{p}{q} < 1$]. Ainsi,

$$(n+1)^2 = A + \left(\frac{p}{q}\right)^2 + 2\left(\frac{p}{q}\right)\sqrt{A} \quad \text{et} \quad (n+1)^2 - A = \left(\frac{p}{q}\right)^2 + 2\left(\frac{p}{q}\right)\sqrt{A}$$

En considérant $\left(\frac{p}{q}\right)^2$ une quantité très petite, nous pourrions alors l'ajouter au second membre de la dernière égalité et obtenir le résultat suivant :

$$((n+1)^2 - A) \approx \left(2\left(\frac{p}{q}\right)^2 + 2\left(\frac{p}{q}\right)\sqrt{A}\right)$$

$$\text{Avec} \left(2\left(\frac{p}{q}\right)^2 + 2\left(\frac{p}{q}\right)\sqrt{A}\right) = \frac{p}{q} \left(2\left(\sqrt{A} + \frac{p}{q}\right)\right) = \frac{p}{q} (2(n+1)).$$

$$\text{D'où} \frac{p}{q} \approx \frac{((n+1)^2 - A)}{2(n+1)}.$$

$$\text{L'erreur est par excès puisque : } (n+1)^2 - A = \frac{p}{q} \left(\frac{p}{q} + 2\sqrt{A}\right)$$

$$\text{D'où} \frac{p}{q} = \frac{(n+1)^2 - A}{\left(2(n+1) - \frac{p}{q}\right)}.$$

[Proposition 2

En posant $A = n^2 + r$] nous avons le résultat suivant :

$$\text{Si } r > n \text{ alors } \sqrt{A} \approx n + \frac{r+1}{2n+2}$$

Exemple

$$\sqrt{92} ?$$

$$\sqrt{92} = \sqrt{9^2 + 11} \approx 9 + \frac{11+1}{2 \cdot 9 + 2}$$

$$\sqrt{92} \approx 9 + \frac{3}{5}$$

$$\text{Avec} \left(9 + \frac{3}{5}\right)^2 = 92 + \frac{4}{5} \left(\frac{1}{5}\right)$$

[Remarque 1]

1- Si $(n+1)^2 = A+1$ alors $A - n^2 = 2n$

On ne peut pas appliquer la formule 1.

Exemple de cela : $A = 168 = 13^2 - 1$

$$\sqrt{168} \approx 12 + \frac{24+1}{2 \cdot 12+2} \quad [= 13 - \frac{1}{2 \cdot 13}]$$

2- Nous démontrons [l'équivalence] des deux formules :

$$(n+1) - \frac{(n+1)^2 - A}{2(n+1)} = n + \frac{2(n+1) - ((n+1)^2 - A)}{2(n+1)} = n + \frac{(A - n^2) + 1}{2(n+1)}.$$

Nous constatons aussi que :

$$\text{Lorsque } (A - n^2) > n \text{ alors } ((n+1)^2 - A) < (A - n^2).$$

$$3- \text{ Si } ((n+1)^2 - A) > (n+1) \text{ alors } \sqrt{A} \approx (n+1) - \frac{((n+1)^2 - A) - 1}{2(n+1) - 2} \quad [= n + \frac{A - n^2}{2n}].$$

$$4- \text{ Si } A - n^2 = n \text{ alors } (n+1)^2 - A = (n+1).$$

$$\text{Dans ce cas, nous avons } \frac{n^2}{A} = \frac{A}{(n+1)^2} \quad \text{et} \quad \sqrt{A} \approx \frac{n+(n+1)}{2}.$$

Exemple

$$\sqrt{30} ?$$

$$[\sqrt{30} = \sqrt{25+5} = \sqrt{36-6} \approx \frac{5+6}{2}].$$

[Proposition 3]

Si x_1 est une valeur approchée de \sqrt{A} obtenue par les procédés d'approximations cités

alors : $x_2 = x_1 - \frac{(x_1)^2 - A}{2x_1}$ est une autre valeur approchée qui est plus précise.

[De la même manière nous pouvons obtenir d'autres valeurs encore plus précises :

$x_3 = x_2 - \frac{(x_2)^2 - A}{2x_2} \dots]$ et ainsi de suite nous pouvons poursuivre l'itération indéfiniment¹.

Exemple

$$\sqrt{68} ?$$

$$\sqrt{68} = \sqrt{64+4} \approx 8 + \frac{1}{4} \quad \text{avec} \quad \left(8 + \frac{1}{4}\right)^2 = 68 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{8}\right)$$

$$\sqrt{68} \approx \left(8 + \frac{1}{4}\right) - \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{8}\right)}{2 \left(8 + \frac{1}{4}\right)} = 8 + \frac{5}{6} \left(\frac{1}{4}\right) + \frac{10}{11} \left(\frac{1}{6} \left(\frac{1}{4}\right)\right)^2.$$

La valeur est plus précise que la première puisque :

¹ - Le résultat a été énoncé sur l'exemple suivant.

² - L'auteur a utilisé deux écritures différentes des fractions.

$$\left(8 + \frac{5}{6}\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{10}{11}\left(\frac{1}{6}\left(\frac{1}{4}\right)\right)\right)^2 = 68 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\left(\frac{1}{6}\left(\frac{1}{11}\left(\frac{1}{11}\right)\right)\right)\right)$$

[Proposition 4

Pour tout nombre non carré A nous avons : $\sqrt{A} = \frac{\sqrt{Ab^2}}{b}$]³.

Exemple

$\sqrt{12}$?

$$\sqrt{12} = \frac{\sqrt{12 \cdot 16}}{4} = \frac{\sqrt{92}}{4} \approx \frac{13 + \frac{6}{7}}{4}$$

$$\sqrt{12} \approx 3 + \frac{3}{7} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{7}\right)$$

Avec $\left(3 + \frac{3}{7} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{7}\right)\right)^2 = 12 + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{7}\left(\frac{1}{7}\right)\right)$

[Remarque 2]

- 1- Le choix de b très grand garantit la précision de la valeur approchée.
- 2- Ce procédé d'approximation est plus utilisé dans le domaine de l'astronomie. Aussi, les valeurs qui sont attribuées à b sont des puissances supérieures de 60.⁴
- 3- Ce procédé d'approximation peut être utilisé aussi pour le calcul de la racine carrée

des fractions : $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)b^2}}{b}$.

La preuve de cette dernière formule repose sur la relation $\sqrt{a \cdot b} = (\sqrt{a})(\sqrt{b})$.

- 4- La décomposition du nombre A en produit de nombre premiers n'est pas utilisée dans le calcul approché. Sauf lorsqu'un nombre se décompose ainsi : $A = n(n+1)$. Dans ce cas $\sqrt{A} \approx \frac{n+(n+1)}{2}$.⁵

[Proposition 5]

$$\sqrt{A} \approx \frac{\sqrt{Ab^2 - 1}}{b}$$

b^2 étant un nombre carré très grand.

³ - L'auteur n'a pas donné l'énoncé de la proposition

⁴ - Les propos d'Ibn Zakariyyā sont ceux d'Ibn al-Bannā dans le *Raf' al-hijāb*.

⁵ - Ce cas a été déjà évoqué pour des données différentes.

[Proposition 6]

$$\sqrt{A} \approx \begin{cases} n + \frac{A - n^2}{(n+1)^2 - n^2} \\ (n+1) - \frac{(n+1)^2 - A}{(n+1)^2 - n^2} \end{cases}$$

[Le dénominateur des deux expressions est celui de l'approximation conventionnelle connue en Orient].

Vérification [par la méthode des soustractions successives]

La vérification du résultat de la racine carrée approchée d'un nombre est basée sur les soustractions successives par un nombre a [$a = 7, 8, 9\dots$].

Nous posons d'abord $\sqrt{A} \approx n + \frac{p}{q}$ puis nous procédons de la manière suivante :

Nous posons $n \equiv n_1[a]$, $(n_1)^2 \equiv n_2[a]$, $p \equiv n_3[a]$, $n_2 + n_3 \equiv n_4[a]$ et $A \equiv n_5[a]$.

Puis, nous comparons les deux derniers restes.

Exemple de cela⁶

$\sqrt{149}$

Nous avons $\sqrt{149} \approx 12 + \frac{5}{24}$ par le premier procédé.

$12 \equiv 5[7]$, $25 \equiv 4[7]$, $(4+5) \equiv 2[7]$ et $149 \equiv 2[7]$.

Les restes sont égaux.

⁶ - C'est le seul exemple que l'auteur a traité.

II- La deuxième partie sur la racine cubique [d'un nombre qui n'est pas un cube parfait]

[Lemme]

1- Les nombres cubes consécutifs sont 1, 8, 27...

Ils vérifient $\sqrt[3]{1} = 1$, $\sqrt[3]{8} = 2 = 1 + 1$, $\sqrt[3]{27} = 3 = 2 + 1 \dots$

Si a, b ($a > b$) sont deux nombres cubes consécutifs alors :

1- $\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b} = 1$

2- Tous les nombres qui sont compris entre a et b ne sont pas des cubes parfaits.

[Exemple]

Pour $A = 15$

Si A était un cube parfait on aurait $2 < \sqrt[3]{A} < 3$

Par conséquent, $\sqrt[3]{15}$ n'est pas entier. Il n'est pas fractionnaire aussi pour les mêmes raisons que nous avons exposées dans la première partie sur la racine carrée.

2- Pour tout nombre entier $A > 1$ il existe un nombre n qui vérifie $n^3 < A < (n+1)^3$.

3- Si a, b ($a > b$) sont deux nombres cubes consécutifs alors $\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b} = 1$ et :

$$a - b = (\sqrt[3]{b}) + (2\sqrt[3]{b} + 1)(\sqrt[3]{b} + 1)$$

$$a - b = (\sqrt[3]{a}) + (2\sqrt[3]{a} - 1)(\sqrt[3]{a} - 1)$$

La différence entre deux nombres cubes consécutifs est un nombre impair.

4- Soient A et n des nombres entiers qui vérifient $n^3 < A < (n+1)^3$.

Posons $u = \frac{((n+1)^3 - n^3) - 1}{2}$:

Si $A = n^3 + v$ tel que $v \leq u$ alors $(A - n^3) < ((n+1)^3 - A)$.

Si $A = n^3 + v$ tel que $v \geq u$ alors $(A - n^3) > ((n+1)^3 - A)$.

[Proposition 1]

Pour tout nombre entier $A > 1$ il existe un nombre n qui vérifie $n^3 < A < (n+1)^3$]

$$\text{Si } (A - n^3) < ((n+1)^3 - A) \text{ alors } \sqrt[3]{A} = n + \left(\sqrt{\left(\frac{1}{2} \left(\frac{3n^2}{3n+1} \right) \right)^2 + \frac{A - n^3}{3n+1}} - \frac{1}{2} \left(\frac{3n^2}{3n+1} \right) \right)$$

Exemple

$\sqrt[3]{70}$?

70 est plus proche de $64 = 4^3$

En appliquant la formule précédente on aboutit aux résultats suivants :

$$\sqrt{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{3.4^2}{3.4+1}\right)\right)^2 + \frac{70-64}{3.4+1}} \approx 1 + \frac{12}{13} + \frac{5}{10}\left(\frac{1}{10}\right) + \frac{4}{5}\left(\frac{1}{10}\left(\frac{1}{13}\right)\right)$$

$$\sqrt[3]{70} \approx 4 + \frac{1}{13} + \frac{5}{10}\left(\frac{1}{13}\right) + \frac{4}{5}\left(\frac{1}{10}\left(\frac{1}{13}\right)\right)$$

[Remarque]

Les procédés d'approximations utilisés pour la racine carrée sont plus précis que ceux de la racine cubique⁷.

[Proposition 2]

Si $A - n^3 > (n+1)^3 - A$ alors :

$$\sqrt[3]{A} \approx (n+1) - \left[\frac{1}{2} \left(\frac{3(n+1)^2}{3(n+1)-1} \right) - \sqrt{\left[\frac{1}{2} \left(\frac{3(n+1)^2}{3(n+1)-1} \right)^2 - \frac{(n+1)^3 - A}{3(n+1)-1} \right]} \right]$$

Exemple⁸

$\sqrt[3]{42}$?

42 est plus proche de 64 et $64 = 4^3$.

$$\frac{64-42}{3.4-1} = 2, \quad \frac{3.4^2}{11} = \frac{48}{11} = 4 + \frac{4}{11} \quad \text{et} \quad \frac{1}{2} \left(4 + \frac{4}{11} \right) = 2 + \frac{2}{11}.$$

D'où $\left(2 + \frac{2}{11} \right)^2 - 2 = 2 + \frac{8}{11} + \frac{4}{11} \left(\frac{1}{11} \right)$ et

$$\sqrt{2 + \frac{8}{11} + \frac{4}{11} \left(\frac{1}{11} \right)} \approx 1 + \frac{7}{11} + \frac{2}{9} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{9} \left(\frac{1}{11} \right) \right)$$

$$\left(2 + \frac{2}{11} \right) - \left(1 + \frac{7}{11} + \frac{2}{9} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{9} \left(\frac{1}{11} \right) \right) \right) = \frac{5}{11} + \frac{6}{9} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{9} \left(\frac{1}{11} \right) \right)$$

$$4 - \left(\frac{5}{11} + \frac{6}{9} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{9} \left(\frac{1}{11} \right) \right) \right) = 3 + \frac{5}{11} + \frac{2}{9} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{9} \left(\frac{1}{11} \right) \right)$$

$$\sqrt[3]{42} \approx 3 + \frac{5}{11} + \frac{2}{9} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{9} \left(\frac{1}{11} \right) \right)$$

⁷ - L'idée de comparer les procédés d'approximations a été évoqué par Ibn Zakariyyā d'une manière générale sans aucune précision. Il s'est référé aux deux ouvrages suivants : *al-Kāmil* d'al-Ḥaṣṣār et *Fiqh al-ḥisāb* d'Ibn Munōim pour confirmer l'existence de preuves sur la validité de l'algorithme de la racine cubique.

⁸ - Ibn Zakariyyā a considéré que 42 est plus proche de 64 alors que $(64 - 42) = 22$ et $(42 - 27) = 15$.

[Proposition 3]⁹

$$\sqrt[3]{A} = \frac{\sqrt[3]{Ab^3}}{b} \quad \text{Ou bien} \quad \sqrt[3]{A} \approx \frac{\left[\sqrt[3]{Ab^3} \right]_{10}}{b}$$

Ces formules ont été proposées dans le but d'affiner l'approximation.

[III- La racine carrée et la racine cubique d'un nombre fractionnaire¹¹]

1- La racine carrée d'une fraction

[Proposition 4]

Si a et b sont des nombres carrés parfaits alors $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

Sinon $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{ab}}{b}$

Exemples

1- $\sqrt{\frac{5}{8} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{8}\right)}$?

$$\sqrt{\frac{5}{8} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{8}\right)} = \left[\frac{\sqrt{21}}{\sqrt{32}} \right] \approx \frac{13}{17} + \frac{8}{10}\left(\frac{1}{17}\right) \text{ qui est par excès.}$$

Ou bien $\sqrt{\frac{5}{8} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{8}\right)} = \sqrt{\frac{21}{32}} = \frac{\sqrt{21 \cdot 32}}{32} \approx \frac{10}{13} + \frac{4}{8}\left(\frac{1}{13}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{8}\left(\frac{1}{13}\right)\right)$.

2- $\sqrt{\frac{5}{7}}$?¹²

$$\left[\sqrt{\frac{5}{7}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}} \approx \frac{2 + \frac{1}{4}}{2 + \frac{3}{4}} = \frac{9}{11} \text{ avec } \left(\frac{9}{11}\right)^2 < \frac{5}{7} \right]$$

3- $\sqrt{\frac{4}{10} + \frac{4}{8}\left(\frac{1}{10}\right)}$?

⁹ - Ibn Zakariyya a fait référence aux procédés d'approximation de la racine carrée pour énoncer celui-ci. Il a ajouté que la preuve de la validité des précédents procédés a été établie par Ibn Munôm et Ibn Tâhir.

¹⁰ - Le numérateur désigne la partie entière du nombre irrationnel $\sqrt[3]{Ab^3}$.

¹¹ - Avant d'énoncer les procédés d'approximation de la racine carrée et de la racine cubique d'une fraction, Ibn Zakariyyā a traité le problème relatif à la manière de trouver les nombres cubes tant qu'on veut en utilisant la suite naturelle des nombres impairs et aussi le résultat suivant : si a et b sont des cubes parfaits alors $(a.b)$, $a.(a.b)$, $a.(a.(a.b))$... sont des cubes parfaits ainsi que $b.(a.b)$, $b.(b.(a.b))$ Et ce en faisant référence à l'ouvrage d'Euclide (E, IX, 1).

¹² - Ibn Zakariyyā n'a pas traité cet exemple il l'a proposé seulement pour montrer que ce type de procédé peut fournir des valeurs par défaut.

$$\sqrt{\frac{4}{10} + \frac{4}{8}\left(\frac{1}{10}\right)} = \left[\frac{6}{\sqrt{80}} \approx \frac{6}{8 + \frac{17}{18}} = \frac{108}{161} = \frac{15}{23} + \frac{3}{7}\left(\frac{1}{23}\right) \right] \text{ et l'erreur est par défaut.}$$

$$\sqrt{\frac{4}{10} + \frac{4}{8}\left(\frac{1}{10}\right)} = \left[\sqrt{\frac{36}{80}} = \frac{\sqrt{36 \cdot 80}}{80} = \frac{\sqrt{2880}}{80} \approx \frac{53 + \frac{2}{3}}{80} = \frac{161}{3.80} = \frac{6}{10} + \frac{5}{8}\left(\frac{1}{10}\right) + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{8}\left(\frac{1}{10}\right)\right) \right]^{13}$$

4- $\sqrt{\frac{3}{8} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{8}\right)}$?

$$\sqrt{\frac{3}{8} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{8}\right)} \left[= \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{16}} \right] \approx \frac{2}{3} \text{ qui est par excès.}$$

$$\sqrt{\frac{3}{8} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{8}\right)} \left[= \frac{\sqrt{7 \cdot 16}}{16} \right] \approx \frac{7}{11} + \frac{2}{8}\left(\frac{1}{11}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{8}\left(\frac{1}{11}\right)\right) \text{ qui est inférieur à la première.}$$

5- $\sqrt{7 + \frac{1}{9}}$?

En appliquant la première formule de la proposition nous obtenons

$$\sqrt{7 + \frac{1}{9}} = \left[\sqrt{\frac{64}{9} = \frac{8}{3}} \right] = 2 + \frac{2}{3}.$$

6- $\sqrt{6 + \frac{5}{8}}$?

$$\text{En appliquant la première formule nous obtenons } \sqrt{6 + \frac{5}{8}} = \left[\sqrt{\frac{53}{8}} \right] \approx 2 + \frac{4}{7}.$$

$$\text{En appliquant la deuxième formule on obtient } \sqrt{6 + \frac{5}{8}} = \left[\frac{\sqrt{53 \cdot 8}}{8} \right] \approx 2 + \frac{4}{7} + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{8}\left(\frac{1}{7}\right)\right)^{14}.$$

7- $\sqrt{3 + \frac{6}{10}}$?

$$\sqrt{3 + \frac{6}{10}} = \left[\sqrt{\frac{36}{10}} \right] \approx 1 + \frac{17}{19} \text{ par la première formule.}$$

¹³ - Ibn Zakariyyā a ajouté que : $\left[\frac{6}{10} + \frac{5}{8}\left(\frac{1}{10}\right) + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{8}\left(\frac{1}{10}\right)\right) \right]^2 = \left[\frac{15}{23} + \frac{3}{7}\left(\frac{1}{23}\right) \right]^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{7}\left(\frac{1}{8}\left(\frac{1}{10}\left(\frac{1}{23}\right)\right)\right)\right)$

¹⁴ - Ibn Zakariyyā a inversé les résultats obtenus.

$$\sqrt{3 + \frac{6}{10}} = \left[\frac{\sqrt{360}}{10} \right] \approx 1 + \frac{17}{19} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{10} \left(\frac{1}{19} \right) \right) \quad \text{par la deuxième formule.}$$

$$8- \sqrt{3 + \frac{7}{8} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{8} \right) \right)} ?$$

$$\sqrt{3 + \frac{7}{8} + \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{8} \right) \right)} \left[= \sqrt{\frac{63}{16}} \right] \approx 1 + \frac{7}{8} + \frac{7}{8} \left(\frac{1}{8} \right) \quad \text{par la première formule}^{15}.$$

$$\sqrt{3 + \frac{7}{8} + \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{8} \right) \right)} \left[= \frac{\sqrt{1008}}{16} \right] \approx 1 + \frac{30}{32} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{8} \right) + \left(\frac{1}{8} \left(\frac{1}{32} \right) \right) \quad \text{par la deuxième formule}^{16}.$$

2- La racine cubique d'un nombre fractionnaire

[Proposition 5]

Si a et b sont des nombres cubes parfaits alors $\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$

Sinon $\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{ab^2}}{b}$

Exemples

$$1- \sqrt[3]{\frac{2}{9} + \frac{2}{3} \left(\frac{1}{9} \right)} ?$$

$$\sqrt[3]{\frac{2}{9} + \frac{2}{3} \left(\frac{1}{9} \right)} \left[= \sqrt[3]{\frac{8}{27}} \right] = \frac{2}{3} \quad \text{par la première formule.}$$

$$\sqrt[3]{\frac{2}{9} + \frac{2}{3} \left(\frac{1}{9} \right)} = \frac{\sqrt[3]{8.729}}{27} = \frac{18}{27} = \frac{2}{3} \quad \text{par la deuxième formule.}$$

$$2- \sqrt[3]{\frac{4}{10} + \frac{1}{8} \left(\frac{1}{10} \right) + \frac{3}{4} \left(\frac{1}{8} \left(\frac{1}{10} \right) \right)} ?$$

$$\sqrt[3]{\frac{4}{10} + \frac{1}{8} \left(\frac{1}{10} \right) + \frac{3}{4} \left(\frac{1}{8} \left(\frac{1}{10} \right) \right)} \left[= \sqrt{\frac{135}{320}} \right] = \frac{\sqrt[3]{135.102400}}{320} = \frac{240}{320} = \frac{3}{4}.$$

$$3- \sqrt[3]{1 + \frac{7}{8} + \frac{5}{8} \left(\frac{1}{8} \right)} ?$$

¹⁵ - Ibn Zakariyyā a donné le résultat suivant $1 + \frac{7}{8} + \frac{3}{8} \left(\frac{1}{8} \right)$.

¹⁶ - L'auteur a donné le résultat des calculs égal à $1 + \frac{30}{31} + \frac{4}{8} + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{8} \right)$.

$$\sqrt[3]{1 + \frac{7}{8} + \frac{5}{8} \left(\frac{1}{8}\right)} \left[= \frac{\sqrt[3]{125}}{\sqrt[3]{64}} \right] = \frac{5}{4} = 1 + \frac{1}{4}$$

4- $\sqrt[3]{37 + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{9}\right)}$?

$$\sqrt[3]{37 + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{9}\right)} \left[= \sqrt[3]{\frac{1000}{27}} \right] = 3 + \frac{1}{3}$$

5- $\sqrt[3]{91 + \frac{1}{9} + \frac{1}{8} \left(\frac{1}{9}\right)}$?

$$\sqrt[3]{91 + \frac{1}{9} + \frac{1}{8} \left(\frac{1}{9}\right)} \left[= \sqrt[3]{\frac{6561}{72}} \right] = \frac{\sqrt[3]{6561 \cdot 72^2}}{72} = \frac{324}{72} = 4 + \frac{1}{2}$$

[Proposition 6]

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{\left(\frac{a}{b}\right) \cdot k^3}}{k}$$

Où k est un entier, choisi très grand, divisible par b

Exemple

$$\sqrt[3]{50 + \frac{1}{2}}$$
 ?

$$\sqrt[3]{50 + \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt[3]{\left(50 + \frac{1}{2}\right) \cdot 64}}{4} = \frac{\sqrt[3]{3232}}{4} \approx \frac{14 + \frac{7}{9}}{4} = 3 + \frac{6}{9} + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{9}\right)$$

III- 1. 4. Edition et analyse mathématique d'une section du
***At-Tamḥīṣ fī sharḥ at-talkhīṣ* d'Ibn Haydūr**
Ms. Rabat, al-Ḥasaniyya, n° 252
pp. 28-39

[28] // وإن بقي شيء فسمه من ضعف الجذر إلى قوله جذره بتقريب.

لما قرر المؤلف رحمه الله أن العدد يوجد على قسمين منطوق الجذر وغير منطوق الجذر وعرفنا كيفية أخذ الجذر المنطوق أخذ الآن يعرفنا ويبين كيف يؤخذ جذر العدد الغير منطوق بتقريب إذ لا يتوصل إلى حقيقته أبداً على ما تقدم.

5 (مقدمة)

(1) واعلم أن كل عدد يراد جذره وهو غير منطوق فإنه واضع بين مربعين متواليين أحدهما أصغر والثاني أكبر منه. مثل ستة مثلاً فإنها واقعة بين أربعة وتسعة.

(2) وكل مربعين متواليين فإن بين جذريهما واحداً أبداً.

كالواحد والأربعة فإن جذر الواحد واحد وجذر الأربعة إثنان وبين الواحد والإثنين واحد.

وكذلك الأربعة والتسعة فإن جذر الأربعة إثنان وجذر التسعة ثلاثة وبينهما واحد. 10

(3) فكل مربعين متواليين فإن بين جذريهما واحداً أبداً ويكون أيضاً ما بين المربعين مثل جذري أصغرهما وواحد وهو أيضاً مثل جذري أكبرهما إلا واحداً وهو أيضاً مثل مجموع الجذرين.

مثل التسعة والستة عشر بينهما سبعة والسبعة مثل ضعف جذر التسعة وواحد وهو أيضاً مثل ضعف جذر الستة عشر إلا واحداً وهو أيضاً مثل المجموع الثلاثة والأربعة. وذلك كله بين من ضرب الأربعة في مثلها بعد

تفصيلها إلى ثلاثة جذر الأصغر وواحد. ف ضرب الأربعة في مثلها مثل ضرب الثلاثة في مثلها والواحد في مثله 15

وضعف أحدهما في الثاني على ما تبين في المقالة الثانية من كتاب الأصول: وذلك ثلاثة في ثلاثة بتسعة وواحد في واحد بواحد وستة في واحد بستة يكون المجموع ستة عشر. لكن ضرب الثلاثة في الثلاثة بالمربع الأصغر

والواحد في مثله بواحد أبداً وضعف الثلاثة في واحد بضعف الثلاثة أبداً فيكون مربع الأكبر يزيد على مربع

الأصغر بضعف جذر الأصغر وواحد. فيكون فضل ما بينهما مثل ضعف جذر الأصغر وواحد وكذلك يتبين أنه مثل ضعف جذر الأكبر إلا واحداً فاعلمه. 20

(مبرهنة 1) وصفة العمل في أخذ جذر العدد بالتقريب من جهة المربع الأصغر وذلك بأن تسمى الفضل بينه وبين الأصغر من ضعف جذر الأصغر إن كانت مثله أو أقل وتنزل التسمية على جذر الأصغر.

ومثال ذلك إذا أردت [29]// أخذت جذر ستة مثلاً: فإنك تحط الأربعة الجذر الأصغر منها والباقي تسميه من ضعف جذر الأربعة لأنه مثل الجذر, يخرج لك في التسمية نصف فتزيده على الإثنين جذر الأربعة يكون الجذر

إثنين ونصف وهو جذر الستة بتقريب. 25

وكذلك لو أخذت جذر الخمسة لكان الباقي واحداً فتسميه من ضعف الجذر لأنه أقل من الجذر فيكون الجذر إثنين وربعا فإذا ضربته في نفسه عادت الخمسة وزيادة نصف ثمن الواحد وهو الذي وقع به التقريب.

وكذلك لو أخذت جذر عشرة المربع الأصغر وهو تسعة وجذرها ثلاثة والفضل بين المربعين واحد, التسمية من ضعف الثلاثة يكون سدسا فتزيده على الثلاثة جذر التسعة يكون الجذر بتقريب ثلاثة وسدسا.

وعلة هذا العمل أن جذر العدد الذي هو في هذا المثال عشرة ينقسم إلى ثلاثة جذر التسعة وإلى كسر مجهول 30

فمربع مجموع القسمين كمربع كل واحد منهما وضعف أحدهما في الثاني فتكون الفضلة بين المربع الأصغر والعشرة مربع الكسر وضعف جذر الأصغر في الكسر.

- ومثال ذلك أن العدد المطلوب جذره مربع ab جـ د وجذره المطلوب خط جـ هـ وهو ينقسم إلى جذر الأصغر وهو جـ هـ وإلى كسر مجهول وهو هـ د. فضرب جـ هـ في نفسه هو مربع از الأصغر. فمربع ab جـ د المطلوب جذره يفضل مربع از بمربع زد وهو مربع الكسر وبسطح ب ز جـ المتممين المتساويين وكل واحد منهما قام من ضرب جذر الأصغر في الكسر. فنجعل سطح جـ ز مساويا لسطح جـ ح متصلا بسطح جـ ز فتكون سطوح حج جـ ز زد الثلاثة الفضل بين المربعين. فكان من البين أن يقسم هذا السطح المشتمل على السطوح الثلاثة على أحد ضلعيه المعلوم يخرج الأصغر لكن الضلعان مجهولين فلا يمكن ذلك فاضطر إلى عمل التقريب بأن قسم المسطح على ضعف الجذر الأصغر الذي هو خط هـ ط. فكان خط هـ د الباقي من ضلع المسطح غير مقسوم عليه تسامحا وتقريبا فبالضرورة أن يخرج الخارج أكبر من خط هـ د المطلوب فيكون التقريب زائدا أبدا على المربع الحقيقي فاعلمه. (الشكل 1)
- 5
- 10 **(ملاحظة 2)** وأما قول المؤلف رحمه الله في رفع الحجاب فتسامح بإسقاط مربع الكسر إلى آخر الفصل ليس بظاهر لأن مربع الكسر لم يسقط في القسمة لأنه محسوب في [30] // المقسوم وإنما المسقوط في القسمة هو الكسر من المقسوم عليه. وألحق المؤلف تبّع في هذا الوهم عبارة برأي السمع بأنها كذلك. فاعتبر ذلك فانظره جدا يتبين لك الصواب إن شاء الله.
- 15 **(مبرهنة 2)** وصفة العمل فيه أيضا من جهة المربع الأكبر أن تسمي الفضل بين عددك والمربع الأكبر من ضعف جذر الأكبر وتنقص التسمية من جذر الأكبر يخرج المطلوب.
- 20 **ومثال ذلك** إذا أردت جذر ثمانية من جهة المربع الأكبر وهو تسعة وهو يزيد على الثمانية بواحد فتسقطه من ستة ضعف جذر التسعة تجده منها سدسا فتحطه من جذر التسعة يكون الباقي إثنين وخمسة أسداس وهو جذر الثمانية بتقريب.
- 25 **وبرهان ذلك** أن تجعل المربع الأكبر مربع ab جـ د والمربع المطلوب جذره مربع اح فجذره المطلوب جـ هـ وجذر المربع الأكبر جـ د والفضل بين الجذرين هـ د وهو الكسر المجهول. والفضل بين المربعين مسطح ط د فإن سطح ط جـ مثل سطح د ب بالفرض، وضعف جذر المربع الأكبر خط دز فإذا قسمنا عليه سطح ط د الفضل وزيادة مربع الكسر خرج لنا ده الكسر المجهول فتحطه من جذر المربع الأكبر بين المطلوب وهو جـ هـ لكن مربع زط الذي هو مربع الكسر مجهولا لا يعلم أبدا فتتسامح بإسقاطه من المقسوم وتقسم الفضل فقط على ط د الذي هو ضعف الجذر الأكبر يخرج لنا كسر أقل من خط ده الكسر المطلوب فإذا أسقطناه من خط جـ د يبقى جـ هـ وزيادة كسر به يقع التقريب وذلك ما أردنا بيانه.
- 30 **(ملاحظة 2)** وقوله أيضا في رفع الحجاب فتتسامح بزيادة مربع الكسر ليس بظاهر أيضا وإنما وقعت الزيادة في المقسوم عليه لا في المقسوم على ما تقدم في التنبيه الأول فإنه قد زيد في المقسوم عليه كسرا ولذلك يكون الخارج أقل من المطلوب فاعلم وانظر ببصيرتك جدا.
- (مبرهنة 3)** وأما إذا كان الباقي أكثر من الجذر فإنك تزيد في الباقي واحدا وتنسبه من ضعف الجذر بزيادة إثنين أبدا.
- 30 **ومثال ذلك** إذا أردت جذر ثمانية مثلا من قبل المربع الأصغر فإنك تزيد في الأربعة الباقية واحدا أبدا وتسمي المجموع من ستة ضعف الجذر وزيادة إثنين وتحمل الخارج على الإثنين يكون الختارج إثنين وخمسة أسداس وهو جذر الثمانية بتقريب.
- وعلة هذا العمل** هو زيادة إلى المربع الأكبر لأن الثمانية [31] // في هذا المثال أقرب إلى التسعة المربع الأكبر

من الأربعة المربع الأصغر فتزد العمل إليه أعني إلى المربع الأكبر بأن تزيد في ضعف الجذر إثنين أبدا لكي يكون ضعف جذر تسعة لأن بين الجذرين واحدا أبدا فيكون بين الضلعين إثنان أبدا وذلك ستة وتزيد في الأربعة الباقية واحدا ليكون مثل الباقي من طرح واحد الفضل بين الثمانية والتسعة من ستة ضعف جذر التسعة وذلك خمسة : لأن نقصان الكسر من جذر الأكبر مثل نقصان الفضلة من ضعف جذر الأكبر وتسمية الباقي من

5 ضعف جذر الأكبر وزيادة التسمية على جذر الأصغر وذلك ظاهر من طرح الكسور. ولكن الباقي بعد طرح الفضل من ضعف الجذر الأكبر هو مثل الفضل الذي بين عدده والمربع الأصغر وزيادة واحد لأن بين المربعين ضعف جذر أكبرهما إلا واحدا كما تقرر. فتسمي هذه الخمسة من ضعف جذر الأكبر وتزيد الخارج إلى جذر الأصغر على ما قرر المؤلف يخرج الجذر بتقريب وذلك إثنان وخمسة أسداس.

10 **[ملاحظة (1)]** واعلم أن أخذ الجذر بتقريب لا يكون بالطريقة الثانية وهي طريقة الحل التي قدمناها إلا في العدد الوسط في النسبة بين المربعين مثل جذر إثني عشر لأن الإثني عشر وسط في النسبة بين التسعة والستة عشر: لأن نسبة التسعة من الإثني عشر كنسبة الإثني عشر من الستة عشر فالإثني عشر وسط في النسبة بين المربعين، (2) ويعلم توسط العدد بالفضل الذي يبقى فإن كان مثل الجذر فهو متوسط وإن كان بخلاف ذلك فهو غير متوسط.

15 (3) ويعلم أيضا بالحل وهو الذي ينحل إلى عددين مختلفين يكون بينهما واحد كالإثني عشر فإنها تنحل إلى ثلاثة وأربعة وبيئهما واحد وكالستة فإنها تنحل إلى عددين مختلفين وبيئهما واحد فإذا أردت أخذ جذرها فإنك تجمع العددين المختلفين وتأخذ نصف الخارج فما كان فهو الجذر فجذر الإثني عشر ثلاثة ونصف : نصف السبعة مجموع الثلاثة والأربعة. وجذر الستة إثنان ونصف : نصف الخمسة مجموع الإثنين والثلاثة.

20 **[مبرهنة 4]** وإن أردت تدقيق التقريب : فسمه من ضعف الجذر واسقط الخارج من الجذر يبقى جذر مربعه أقرب إلى العدد المطلوب جذره من المربع الأول.

هو الذي ذكر المؤلف في هذا الفصل هو العمل في تدقيق الشيء الذي وقع به التقريب. ومثاله إذا أردت جذر خمسة مثلا فتعمل العمل المتقدم ذكره يخرج لك الجذر إثنان وربعا بتقريب لأنه أكثر من الجذر الحقيقي والدليل عليه أنه أكثر من الجذر الحقيقي [32] // أنك إذا ضربته في نفسه كان الخارج أكثر من خمسة ونصف ثم فزاد على المربع بنصف ثم فيكون الجذر على هذا زائدا على الجذر الحقيقي لأن الجذر الحقيقي إذا ضرب في نفسه عاد المربع من غير زيادة فإذا ضرب الجذر وزيادة شيء معه كان الخارج أكثر من المربع فالجذر المقرب بزيادة كسر فيه وتلك الزيادة مجهولة وبها وقع التقريب بالزائد على المربع كما ذكر المؤلف هنا وفي رفع الحجاب وهو في هذا المثال نصف ثمن.

30 **[ملاحظة]** فليس بظاهر ما ذكره المؤلف لأن التقريب لا ينسب للمربع وإنما ينسب للجذر بالتقريب إنما وقع في الإثني وربع بزيادة شيء فيه ومن هنا قيل له جذر بتقريب ولا يقال مربع بتقريب، لكنه لما كان الشيء الذي وقع به التقريب في الجذر لا يتوصل إليه ولا ينطق بكميته وكان الخارج من ضرب الجذر المقرب في نفسه بزيادة كسر على المربع المطلوب جذره نسب التقريب لذلك الكسر مجازا لا حقيقة. والتقريب أيضا معنى من المعاني وهو العمل فكان من حقه أن يقول وإن أردت تدقيق الشيء الذي وقع به التقريب وقد بيناه بالبرهان فاعتمد عليه ترشد للصواب. فإذا أردت تدقيق الشيء الزائد في الجذر وهو كسر مجهول فإنك تدقق الكسر الزائد على المربع

5- من طرح : طرح // 6- عدده والمربع : عدده المربع // 9- الحل : الحد // 11- في النسبة : بالنسبة // 13- بخلاف ذلك : بخلاف ذلك // 17- فجزر : فالجذر / ونصف : نصف السبعة : ونصف السبعة // 24- خمسة : مكررة.

وهو في مثالنا هذا نصف ثمن بأن تسميه من أربعة ونصف ضعف الجذر وتطرح الخارج وهو ثمن التسع من

- اثنتين وربع الجذر يبقى إثنان وتسعين وثمان التسع وهو الجذر المقرب لأنه إذا ضرب في نفسه يخرج لك تسع
تسع ثمن فهذا المربع أقرب إلى الخمسة من الخمسة ونصف الثمن المربع الأول. وكذلك لو أردت أيضا تدقيق
هذا الجذر لعملت فيه هذا العمل بعينه يخرج لك ما هو أقرب من الثاني وكذلك إلى غير نهاية فإنه يتدقق ولا
ينقطع ويؤدي هذا البرهان إلى أن يكون في الوجود الخارجي جزء يتجزأ إلى غير نهاية ولا ينتهي به إلى جزء
لا يقبل التجزئة فيكون مؤلفا من أجزاء لا تنتاها عند القسمة والتجزئة فاعلم ذلك كله.
- 5 [مبرهنة 5] وفي التقريب وجه آخر وهو أن تضرب العدد المطلوب جذره في عدد مربع أعظم منه ويؤخذ
جذر المجتمع بتقريب ويقسم على جذر المربع المضروب فيه فما خرج فهو الجذر المقرب.
هذا الذي ذكر المؤلف وجه ثان في أخذ جذر العدد بتقريب.
- 10 مثال ذلك إذا أردت جذر خمسة فتضربها في تسعة بخمسة وأربعين فتأخذ جذرها بالوجه الأول يكون ستة
وخمسة أسباع فتقسمها على ثلاثة جذر التسعة يخرج لك الجذر بتقريب وذلك إثنان وسبع وثلاثا سبع.
وعلة هذا العمل الثاني هو أن ضرب عدد في عدد [33] // وأخذ جذر الخارج كضرب جذر أحدهما في جذر
الثاني. لأنك إذا ضربت العدد المطلوب جذره في مربع وأخذت جذر الخارج كان مثل ضرب جذر العدد
المطلوب جذره في جذر المربع. وإذا قسم خارج الضرب على أحد المضروبين خرج الآخر فإذا قسمناه على
جذر المربع خرج جذر العدد بتقريب، فسبب أخذ الجذر بتقريب في الخارج من ضرب المربع في العدد.
- 15 ومثاله في النوع المنطق إذا أردت أخذ جذر أربعة مثلا فإنك تضربها في تسعة وتأخذ جذر الخارج بسنة فالسنة
تساوي الخارج من ضرب جذر الأربعة في جذر التسعة فإذا قسمت السنة على الثلاثة جذر التسعة خرج إثنان
وهو جذر الأربعة المطلوب.
- 20 [ملاحظة] ولو كان المطلوب جذر التسعة وضربته في مربع أصغر منهما كأنها الأربعة مثلا وأخذت جذر
الخارج الذي هو ستة وقسمته على جذر الأربعة يخرج لك جذر التسعة المطلوب.
فيكون في هذا العمل الثاني وجهان وهو إما أن تضرب العدد المطلوب جذره في عدد مربع أعظم منه وهو
المذكور وإما أن تضربه في مربع أصغر منه وهو أكثر تقريبا من الوجه الأول وهو سبب عدول المؤلف عنه
في الوجه الأول.
- ومهما عظم المربع المضروب فيه قل التقريب وعظم التدقيق وبالعكس في العكس.
- 25 وينتفع بهذا الوجه الثاني في أخذ جذور الدرج والدقائق فإنها تصرف إلى الثواني والروابع ويؤخذ جذرها لأن
الثواني أجزاء من سنتين في جزء من سنتين من الدرجة والدرجة الواحدة جزء من ثلاثمائة وستين جزءا من
منطقة فلك البروج وكل جزء منها مقسوم بستين دقيقة وكل دقيقة مقسومة بستين ثانية وكل ثانية مقسومة بستين
ثالثة وكذلك إلى ثمانية مما قدروا على قسمته وتحقيقه في الأرصاد الدورية والتراكيب الزيجية.
- وأما كيفية العمل في أخذ جذرها فكالعمل في أخذ جذور الكسور لأنها كسر مثلها كما هو مذكور في موضعه.
واختصت الكسور بهذا العمل لأنه أقرب فيها من العمل الأول وأكثر تدقيقا منه ولكن لا بد فيه من العمل الأول
فهو الأصل لأنك إذا ضربته في مربع أعظم منه فلا بد لك أن تأخذ جذر الخارج بالوجه الأول ولو أخذته بالوجه
الثاني لتسلسل فيه العمل إلى غير نهاية فلا ينتج.
- (مبرهنة 6) وأما تجذير الكسور فهو أن تضرب البسط في الإمام وتقسم جذر الخارج على الإمام وإن كان

13- مثل ضرب : مثل من ضرب // 14- في جذر : على الهامش // 15- المربع في العدد : المربع في المربع // 23- في :
غير واضحة // 28- الزيجية : الريحية.

- للبيسط جذر منطوق والإمام مثله فاقسم جذر البسط على جذر الإمام.
- اعلم أن الكسر والصحيح أو الصحيح والكسر المطلوب [34] // جذره إما أن يكون منطوق الجذر أو غير منطوق ويعلم المنطق من غير المنطق بأن ينظر إلى البسط والإمام أو الخارج من ضرب الأئمة بعضها في بعض إن كثرت فإن كان لكل واحد منهما جذر منطوق فللكسر جذر منطوق وجذره يوافق الخارج من قسمة جذر البسط على جذر الإمام أو تسمية منه ولا يكون في الكسر أبداً إلا أكثر من المربع لعله أن ضرب الكسور تبعيض على ما تقدم ويكون في الصحيح والكسر بينهما أقل من العدد الصحيح وأكثر من الكسر لطلب كل واحد منهما من الآخر وكان الخارج وسط بينهما على ما تقرر في ضرب الصحيح في الكسر.
- وإن لم يكن لكل واحد منهما جذر منطوق فليس له جذر منطوق فتأخذه بالتقريب بأن تضرب البسط في الإمام وتأخذ جذر الخارج وتقسمه على الإمام فما خرج فهو الجذر.
- 10 **ومثال ذلك في المنطق** إذا أردت أخذ جذر ربع فإنك تأخذ جذر البسط بواحد وجذر المقام بإثنين وتسمي الواحد من الإثنين يكون نصفاً وهو جذر ربع وهو أكثر منه على ما شرط.
- ومثال آخر** إذا أردت أخذ جذر أربعة أثمان ونصف ثمن فتبسطه يكون تسعة وجذرها ثلاثة وتضرب الثمانية في الإثنين بستة عشر وجذرها أربعة فتسمي ثلاثة من أربعة بثلاثة أرباع وهو جذر أربعة أثمان ونصف ثمن وهو أكثر منه.
- 15 **ومثال آخر** إذا قيل لك كم جذر إثنين وربع فتبسطه بتسعة وجذرها ثلاثة وجذر الأربعة إثنان فتقسم الثلاثة على الإثنين يخرج لك الجذر واحد ونصف وهو أقل من الإثنين وأكثر من الربع.
- ومثال آخر** إذا قيل لك كم جذر واحد وخمسين وخمس الخمس فإنك تبسطه يخرج لك في البسط ستة وثلاثون وجذرها ستة وتأخذ جذر المقام بخمسة ثم تقسم الستة على الخمسة يخرج الجذر واحداً وخمسا.
- وإن أردت أخذ جذر الكسور الغير منطقة فإنك تضرب بسط المسألة في الإمام أو في الأئمة إن كثرت وتأخذ جذر الخارج بتقريب بالوجه الأول المذكور وتقسمه على الإمام يخرج الجذر بتقريب.
- 20 **ومثال ذلك** إذا أردت أخذ جذر خمسة أسداس فإنك تضرب خمسة البسط في الستة الإمام وتأخذ جذر الثلاثين الخارجة بتقريب يكون خمسة ونصف فتقسمه على الستة يخرج لك في القسمة خمسة أسداس ونصف سدس وهو جذر خمسة أسداس بتقريب.
- ومثال آخر** إذا قيل لك كم جذر إثنين [35] // ونصف فتبسطه يخرج خمسة فتضربها في الإثنين المقام بعشرة فتأخذ جذرها بتقريب يكون ثلاثة وسدسا فتقسمه على الإثنين يخرج لك واحد وثلاثة أسداس ونصف سدس وهو الجذر فاعلم ذلك كله.
- 25 **وعلة هذا العمل** هو علة الوجه الثاني في عمل التقريب لأنه هو بعينه لأنك تضرب الكسر في مربع الإمام فيخرج لك ضرب البسط في الإمام لأن الضرب في عدد والقسمة عليه يقابل الضرب بالقسمة فيبقى ضرب البسط في الإمام فاعلمه.
- 30 **ولنذكر هنا كليات يستفح بها في استخراج الكسور المجذورة والصحيح والكسور:**
- (1) كل عدد ينقص منه تسع واحد ويضرب مثل نصف الباقي في مثله فإن المجتمع إذا حمل عليه العدد الأول كان للمجموع جذر وجذره مثل نصف العدد الأول مع سدس واحد.
- مثال ذلك** لنفرض العدد عشرة فإذا نقصنا منها تسع واحد يبقى تسعة وثمانية أتساع فإذا ضربنا مثلها ومثل نصفها في مثله وهو أربعة عشر وخمسة أسداس يجتمع مائتان وعشرون فتزيد عليه العشرة يجتمع مائتان

- وثلاثون وربع تسع وهو مجذور وجذره خمسة عشر وسدس وهو مثل نصف العدد الأول إلا تسع ونصف تسع واحد الذي هو سدس واحد.
- فكل عدد يضرب مجموعه مع نصفه إلا تسع واحد في مثله فإن المجتمع إذا حمل عليه العدد الأول كان المجموع ذلك جذر وجذره هو مثل ونصف العدد الأول مع سدس واحد.
- 5 (2) وكل عدد ينقص منه نصف ثمن واحد ويضرب مثلي الباقي وهو مثلا العدد الأول إلا ثمن واحد في مثله فإن المجتمع إذا حمل عليه العدد الأول فإن المجموع يكون له جذر وجذره هو مثلا العدد الأول مع ثمن واحد.
- مثال ذلك لنفرض العدد تسعة فإذا نقصنا منه نصف ثمن واحد يبقى ثمانية وسبعة أثمان ونصف ثمن فإذا ضربنا مثليه وهو سبعة عشر وسبعة أثمان في مثله اجتمع ثلاثمائة وتسعة عشر وأربعة أثمان وثمان الثمن فإذا حملنا عليه العدد الأول وهو تسعة اجتمع ثمانية وعشرون وثلاثمائة وأربعة أثمان وثمان الثمن وهو مجذور وجذره مائة عشر وثمان وهو مثلا العدد الأول مع ثمن واحد. ولما كان الباقي هو مثلا العدد الأول إلا ثمن واحد فكل عدد يضرب مجموع مثليه إلا ثمن واحد في مثله فإن المجتمع إذا حمل عليه العدد الأول كان لمجموع ذلك جذر وجذره هو مثلا العدد الأول مع ثمن واحد.
- 10 (3) وكل عدد ينقص منه خمس خمس واحد ويضرب مثلا الباقي ونصف مثله في مثله فإن المجتمع إذا حمل عليه العدد الأول يكون للمجموع جذر وجذره هو مثلا [36] // العدد الأول ونصف مثله مع عشر واحد.
- 15 مثال ذلك لنفرض العدد ستة فإذا نقصنا منه خمس خمس واحد يبقى خمسة وأربعة أخماس وأربعة أخماس الخمس. فإذا ضربنا مثليه ونصفه هو أربعة عشر وتسعة أعشار في مثله اجتمع مائتان واثنان وعشرون وعشر العشر فإذا حملنا عليه العدد الأول وهو ستة اجتمع ثمانية وعشرون ومائتان وعشر العشر وهو مجذور وجذره خمسة عشر وعشر وهو مثلا العدد الأول ونصف مثله مع زيادة عشر واحد.
- ولما كان الباقي هو مثلا العدد الأول ونصف مثله إلا عشر واحد فكل عدد يضرب مجموعه مع نصفه إلا عشر واحد في مثله فإن المجتمع إذا حمل عليه العدد الأول كان مجموع ذلك له جذر وجذره هو مثلا العدد الأول ونصف مثله مع عشر واحد.
- 20 (4) وكل عدد ينقص منه سدس سدس واحد ويضرب ثلاثة أمثال الباقي في مثله فإن المجتمع إذا حمل عليه العدد الأول كان للمجموع جذر وجذره هو ثلاثة أمثال العدد الأول مع نصف سدس واحد.
- ومثال ذلك لنفرض العدد ستة وإذا نقصنا منه سدس سدس واحد بقي منه خمسة وخمسة أسداس السدس فإذا ضربنا ثلاثة أمثاله وهو سبعة عشر وخمسة أسداس ونصف سدس في مثله اجتمع ثلاثمائة وأحد وعشرون ونصف ثمن التسع فإذا حملنا عليه العدد الأول وهو ستة اجتمع سبعة وعشرون وثلاثمائة ونصف ثمن التسع وهو عدد مجذور وجذره ثمانية عشر ونصف سدس وهو ثلاثة أمثال العدد الأول مع نصف سدس واحد.
- ولما كان الباقي هو ثلاثة أمثال العدد الأول إلا نصف سدس واحد فكل عدد يضرب ثلاثة أمثاله إلا نصف سدس واحد في مثله فإن المجتمع إذا حمل عليه ثلاثة أمثال العدد الأول كان لمجموع ذلك جذر وجذره هو ثلاثة أمثال العدد الأول مع نصف سدس.
- 30 (5) وكل عدد ينقص منه سبع سبع واحد يضرب ثلاثة أمثال الباقي ونصف مثله في مثله فإن المجتمع إذا حمل عليه العدد الأول كان للمجتمع جذر وجذره هو ثلاثة أمثال العدد الأول في نصف مثله مع نصف سبع واحد.
- مثال ذلك لنفرض العدد ثمانية فإذا نقصنا منها سبع سبع واحد وضربنا ثلاثة أمثال الباقي ونصف مثله في مثله اجتمع ثمانون وسبعمائة وربع سبع السبع فإذا حملنا عليه العدد الأول اجتمع ثمانية وثمانون وسبعمائة وربع سبع

السبع وهو مجذور وجذره ثمانية وعشرون ونصف سبع وهو ثلاثة أمثال ونصف مثل العدد الأول مع نصف سبع واحد ولما كان هذا الباقي هو ثلاثة أمثال العدد الأول ونصف مثله إلا نصف سبع [37] // واحد لزم منه أن كل عدد يضرب ثلاثة أمثاله ونصف مثله إلا نصف سبع واحد في مثله فإن المجتمع إذا حمل عليه العدد الأول كان لمجموع ذلك جذر وجذره هو ثلاثة أمثال العدد الأول ونصف مثله مع نصف سبع واحد.

5 (6) وكل عدد ينقص منه ثمن ثمن واحد ويضرب أربعة أمثال الباقي فإن المجتمع إذا حمل عليه العدد الأول كان للمجموع جذر وجذره هو أربعة أمثال العدد الأول مع نصف ثمن واحد.

ومثال ذلك لنفرض العدد تسعة فإذا نقصنا منه ثمن ثمن واحد وضربنا أربعة أمثال الباقي في مثله اجتمع واحد وتسعون ومائتان وألف وأربعة أثمان وربع ثمن ثمن فإذا حملنا عليه العدد الأول وهو تسعة كان لمجموعها جذر وجذره ستة وثلاثون ونصف ثمن وهو أربعة أمثال العدد الأول مع نصف ثمن واحد.

10 ولما كان هذا الباقي هو أربعة أمثال العدد الأول إلا نصف ثمن واحد لزم منه أن كل عدد يضرب أربعة أمثاله إلا نصف ثمن واحد في مثله فإن المجتمع إذا حمل عليه العدد الأول كان لمجموع ذلك جذر وجذره هو أربعة أمثال العدد الأول مع نصف ثمن واحد.

(7) وكل عدد ينقص منه تسع تسع واحد ويضرب أربعة أمثال العدد الباقي ونصف مثله في مثله فإن المجتمع إذا حمل عليه العدد الأول كان للمجموع جذر وجذره هو أربعة أمثال ونصف مثل العدد الأول مع نصف تسع واحد.

15 مثال ذلك لنفرض العدد عشرة فإذا نقصنا منه تسع تسع واحد وضربنا أربعة أمثال الباقي ونصف مثله في مثله اجتمع عشرون وألفان وربع تسع التسع. فإذا حملنا عليه العدد الأول كان للمجموع جذر وجذره خمسة وأربعون ونصف تسع وهو أربعة أمثال العدد الأول ونصف مثله مع نصف تسع واحد.

20 ولما كان هذا الباقي هو أربعة أمثال العدد الأول ونصف مثله إلا نصف تسع واحد لزم منه أن كل عدد يضرب أربعة أمثاله ونصف مثله إلا نصف تسع واحد في مثله فإن إذا حمل عليه العدد الأول كان لمجموع ذلك جذر وجذره هو أربعة أمثال العدد الأول منصف مثله إلا نصف تسع واحد.

(8) كل عدد ينقص منه عشر عشر واحد ويضرب خمسة أمثال الواحد في مثله فإن المجتمع إذا حمل عليه العدد الأول فإن المجتمع يكون له جذر وجذره خمسة أمثال العدد الأول مع نصف عشر واحد.

مثال ذلك لنفرض العدد أحد عشر فإذا نقصنا منه عشر عشر واحد وضربنا خمسة أمثال الباقي في مثله وزدنا [38] // على الخارج العدد الأول اجتمع ثلاثون وثلاثة آلاف وخمسة أعشار وربع عشر العشر وهو مجذور وجذره خمسة وخمسون ونصف عشر وهو خمسة أمثال العدد الأول مع نصف عشر واحد.

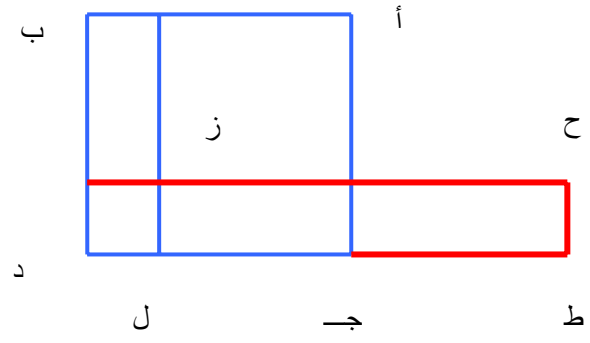
25 ولما كان العدد الباقي هو خمسة أمثال العدد الأول مع نصف عشر واحد ولما كان ذلك الباقي هو خمسة أمثال العدد الأول إلا نصف عشر واحد لزم منه أن كل عدد يضرب خمسة أمثاله إلا نصف عشر في مثله فإن المجتمع إذا حمل عليه العدد الأول كان لمجموع ذلك جذر وجذره هو خمسة أمثال العدد الأول مع نصف عشر واحد.

(9) وكل عدد ينقص منه جزء من أحد عشر في الجزء من أحد عشر من واحد ويضرب خمسة أمثال الباقي ونصف مثله في مثله فإن المجتمع إذا حمل عليه العدد الأول كان للمجموع جذر وجذره هو خمسة أمثال العدد الأول ونصف مثله مع نصف جزء الواحد من أحد عشر.

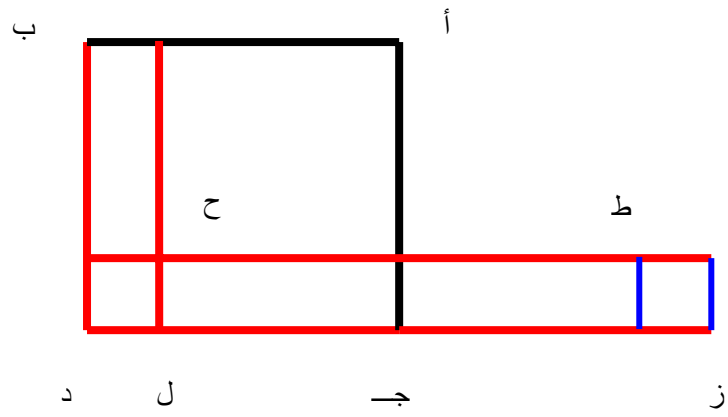
مثال ذلك لنفرض العدد إثني عشر فإذا نقصنا منه الجزء من أحد عشر في الجزء من أحد عشر من الواحد

وضربنا خمسة أمثال الباقي ونصف مثله في مثله وحملنا على الخارج العدد الأول اجتمع من ذلك إثنان وستون وثلاثمائة وأربعة آلاف وربع الجزء من أحد عشر في الجزء من أحد عشر في الجزء من أحد عشر وهو مجذور وجذره ستة وستون ونصف الجزء من أحد عشر وهو خمسة أمثال ونصف مثل العدد الأول إلا نصف جزء من أحد عشر من واحد لزم منه أن كل عدد يضرب خمسة أمثاله ونصف مثله إلا نصف جزء من أحد عشر من واحد في مثله فإن المجتمع إذا حمل عليه العدد الأول كان لمجموع ذلك جذر وجذره هو خمسة أمثال ونصف مثل العدد الأول إلا نصف جزء من أحد عشر من واحد.

مسألة : نريد أن نجد عددا صحيحا وكسرا مجذورا ويكون في آخر منازلته خمسة وعشرون. فتطلب عددا صحيحا مجذورا يكون في آخر منازلته خمسة وخمسون فتجد أقل عدد يكون فيه ذلك هو خمسة وعشرون ومائتان وخمسة وخمسون ألفا وجذره هو خمسة وثلاثون ومائتان وهذا الجذر هو من ضرب خمسة في سبعة وأربعين. فإن شئنا حملنا على هذا العدد المجذور نصف جذره وتحمل على المجموع نصف ثمن واحد وهو إثنين وأربعين وثلاثمائة وخمسة وخمسين ألفا وأربعة أثمان ونصف ثمن وهو مجذور لأن بسطه مجذورا وإمامه مجذورا وجذره خمسة وثلاثون ومائتان وربع وإن شئنا زدنا على ذلك العدد المجذور نصف العدد الأعظم من العددين الذين هما ضلعا جذره [39] // ويكون ذلك ثمانية وأربعون ومائتان وخمسة وخمسون ألفا ونصف واحد فتحمل عليه ربع عشر عشر واحد مما اجتمع وهو عدد مجذور وجذره خمسة وثلاثون ومائتان ونصف عشر.



(الشكل 1)



(الشكل 2)

ANALYSE MATHÉMATIQUE

[Le calcul de la racine carrée d'un nombre par des méthodes d'approximation]

[Lemme]

1- Tout nombre, qui n'est pas un carré parfait, est compris entre deux carrés consécutifs :

Pour tout nombre non carré A il existe un entier n tel que $n^2 < A < (n+1)^2$.

Exemple

Pour $A = 6$ on a $4 < 6 < 9$.

2- Si a^2, b^2 sont deux carrés consécutifs tel que $a^2 > b^2$ alors $a - b = 1$.

Exemples

Pour $(a^2, b^2) = (4, 1)$ on a $\sqrt{4} - \sqrt{1} = 1$

Egalement pour $(a^2, b^2) = (9, 4)$ on a $\sqrt{9} - \sqrt{4} = 1$.

3- Si a^2, b^2 sont deux carrés consécutifs tel que $a^2 > b^2$ alors :

$$a^2 - b^2 = 2b + 1$$

$$= 2a - 1$$

$$= a + b$$

Exemples

$$16 - 9 = 7$$

$$\begin{aligned} \text{Pour } (a^2, b^2) = (9, 16) \text{ on a :} &= 2 \cdot 3 + 1 \\ &= 2 \cdot 4 - 1 \\ &= 3 + 4 \end{aligned}$$

[Preuve de cela]

Le résultat est basé sur la relation suivante¹⁷ :

$$16 = (3+1)^2 = 3^2 + 2 \cdot 3 + 1.$$

[Proposition 1]

Soit A le nombre dont on veut calculer la racine et n un entier qui vérifie $n^2 < A < (n+1)^2$ on a alors :

$$\sqrt{A} \approx n + \frac{A - n^2}{2n} \quad \text{si} \quad (A - n^2) \leq n$$

Exemples

1- $\sqrt{6} \approx 2 + \frac{6-4}{2 \cdot 2} = 2 + \frac{1}{2}$ puisque $6 - 4 = 2$, 2 étant la racine de 4 qui est le carré le plus proche de 6.

¹⁷ - L'auteur a évoqué le livre II des Eléments d'Euclide mais il n'a pas précisé la proposition qui exprime le résultat énoncé.

$$2- \quad \sqrt{5} \approx 2 + \frac{5-4}{2.2} = 2 + \frac{1}{4} \quad \text{avec} \quad \left(2 + \frac{1}{4}\right)^2 = 5 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{8}\right)$$

$$3- \quad \sqrt{10} \approx 3 + \frac{10-9}{2.3} = 3 + \frac{1}{6}.$$

[Preuve]

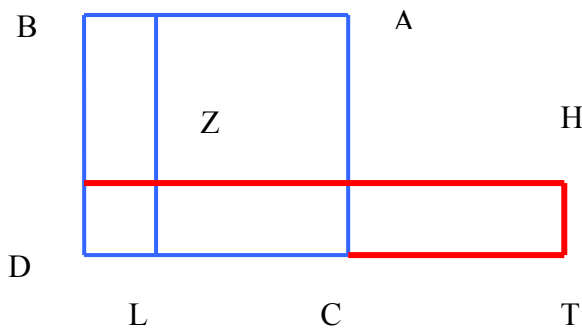
Pour calculer $\sqrt{10}$ par exemple nous posons $\sqrt{10} = 3 + \frac{p}{q}$.

$$\text{D'où } 10 = \left(3 + \frac{p}{q}\right)^2 = 9 + 6\frac{p}{q} + \left(\frac{p}{q}\right)^2 \quad \text{et} \quad 10 - 9 = \left(\frac{p}{q}\right)^2 + 6\frac{p}{q}.$$

[Dans le cas générale, nous aurons $\sqrt{A} = n + \frac{p}{q}$, $A = n^2 + 2n\frac{p}{q} + \left(\frac{p}{q}\right)^2$ et

$$A - n^2 = 2n\left(\frac{p}{q}\right) + \left(\frac{p}{q}\right)^2.]$$

Représentons le nombre A dont on veut calculer la racine par le carré ABCD :



Posons $DC = \sqrt{A} = CL + LD$ avec $CL = n$ et $LD = \frac{p}{q}$.

Posons aussi $CL^2 = (AZ) = n^2$ et $(BC) - (AZ) = (DZ) + (BZ) + (ZC)$ avec $(BZ) = (ZC) = n \cdot \frac{p}{q}$.

En posant $(CH) = (CZ)$ on aura $(HC) + (CZ) + (ZD) = (BC) - (AZ) = S$.

S est alors une surface inconnue¹⁸. Il est donc nécessaire d'utiliser un raisonnement qui est basé sur le calcul par approximation pour déterminer la valeur de $LD = LZ$.

Pour cela, nous avons :

$$\text{D'une part } LZ = DL = \frac{r}{2n + DL} \quad \text{et} \quad \frac{S}{2n} = \frac{r}{2n} \quad \text{d'une autre part.}$$

Par conséquent, $\frac{S}{2n} > DL$

¹⁸ - Effectivement, nous pouvons écrire $S = A - n^2 = x(x + 2n)$ où x désigne la fraction $\left(\frac{p}{q}\right)$ qui est inconnue.

En ôtant DL du dénominateur de la première fraction c'est-à-dire $\frac{r}{(2n+DL)-DL}$ on obtient une valeur approchée du nombre irrationnel égale à $\left(n + \frac{S}{2n}\right)$.

L'erreur commise est par excès [puisque $\sqrt{A} = n + \frac{S}{2n+DL} < n + \frac{S}{2n}$].

[Remarque]

Dans notre raisonnement, on n'a pas utilisé l'idée de négliger le carré de la fraction. On a plutôt négligé la fraction $DL=x$ et $x' = \frac{A-n^2}{2n}$ et vérifie $x \approx x'$ avec $x = \frac{A-n^2}{x+2n}$.

[Proposition 2]

$$\sqrt{A} \approx (n+1) - \frac{(n+1)^2 - A}{2(n+1)}$$

Exemple

$\sqrt{8} = ?$

Nous avons $2^2 = 4 < 8 < 3^2 = 9$. D'où $\sqrt{8} \approx 3 - \frac{1}{6} = 2 + \frac{5}{6}$.

Preuve

Nous représentons le carré $(n+1)^2$ par le carré $ABCD$:

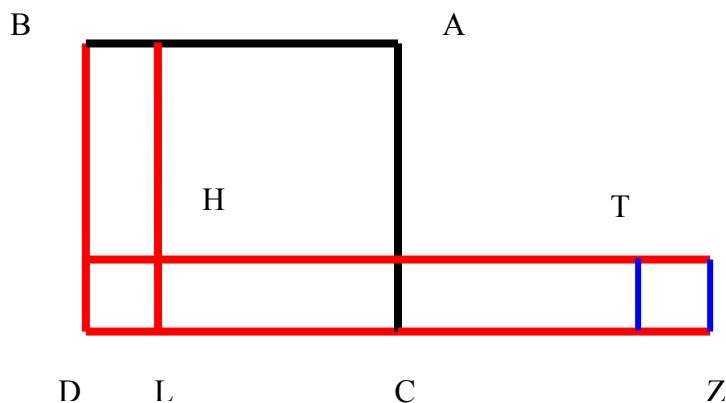
Le nombre A est déterminé par la surface du carré définie par les deux points A et H que l'on note (AH) .

Ainsi, $CL = \sqrt{A}$, $(n+1) = CD$ et $LD = (n+1) - \sqrt{A}$ représente la fraction dont on veut déterminer la valeur.

Dans le prolongement de la droite qui passe par H , soit T tel que la surface du rectangle (DT) est égale à $(BC) - (AH) = (n+1)^2 - A$.

Soit aussi Z tel que $2CD = DZ [= 2(n+1)]$.

D'où $\frac{(DT)+(TZ)}{DZ} = DL$ avec $(TZ) = DL^2$



$$\frac{(DT)+DL^2}{2(n+1)}=DL \quad \Rightarrow \quad DL \approx \frac{(DT)}{2(n+1)}$$

Par conséquent, $DL \approx \frac{(n+1)^2 - A}{2(n+1)}$ avec $DL > \frac{(n+1)^2 - A}{2(n+1)}$

$$\text{Et } DC - \frac{(DT)}{DZ} \left[= (n+1) - \frac{(n+1)^2 - A}{2(n+1)} \right] = LC + u \quad ^{19}.$$

[Remarque 2]

D'après la relation $\frac{(DT)+DL^2}{2(n+1)}=DL \quad \Rightarrow \quad DL \approx \frac{(DT)}{2(n+1)}$ c'est le numérateur de la première fraction qui contient l'excès qui est DL^2 .

[Proposition 3]

$$\text{Si } A - n^2 > n \quad \text{alors} \quad \sqrt{A} \approx n + \frac{(A - n^2) + 1}{2n + 2}$$

Preuve

$$\left[(n+1) - \frac{(n+1)^2 - A}{2(n+1)} \right] = \left[n + \frac{(A - n^2) + 1}{2n + 2} \right].$$

$$\text{Car : } \left[(n+1) - \frac{(n+1)^2 - A}{2(n+1)} \right] = n + \frac{((2n+2) - ((n+1)^2 - A))}{2n+2}$$

$$\text{Ainsi, } \left[(n+1) - \frac{(n+1)^2 - A}{2(n+1)} \right] = n + \frac{(A - n^2) + 1}{2n + 2}.$$

[Remarque]

$$\sqrt{12} ?$$

Nous remarquons que le nombre 12 est une moyenne proportionnelle entre les nombres carrés qui l'encadrent 9 et 16 : $\frac{9}{12} = \frac{12}{16}$. D'où $\sqrt{12} \approx \frac{1}{2}(3+4) = 3 + \frac{1}{2}$.

$$\text{Dans le cas général : Si } A = n(n+1) \quad \text{alors} \quad \sqrt{A} \approx \frac{1}{2}(n + (n+1))$$

$$[\text{Exemple de cela}] \sqrt{6} \approx \frac{1}{2}(2+3) = 2 + \frac{1}{2}.$$

[Proposition 4]

Soit x_1 une valeur approchée du nombre irrationnel \sqrt{A} obtenue par les procédés d'approximations déjà cités.

¹⁹ - $LC + u = \sqrt{A} + u$. Ibn Haydur a considéré u comme une fraction qui représente l'erreur commise lorsqu'on

attribut à \sqrt{A} la valeur $DC - \frac{(DT)}{DZ} \left[= (n+1) - \frac{(n+1)^2 - A}{2(n+1)} \right]$.

$x_2 = x_1 - \frac{(x_1)^2 - A}{2x_1}$ est une deuxième valeur approchée qui est plus précise.

Exemple

$\sqrt{5}$?

$$x_1 = 2 + \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad (x_1)^2 = 5 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{8} \right)$$

$$x_2 = \left(2 + \frac{1}{4} \right) - \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{8} \right)}{4 + \frac{1}{2}} = 2 + \frac{2}{9} + \frac{1}{8} \left(\frac{1}{9} \right). \quad \text{Avec} \quad (x_2)^2 - 5 = \frac{1}{9} \left(\frac{1}{9} \left(\frac{1}{8} \right) \right).$$

[Remarque]

Nous pouvons répéter le procédé sur x_2 et obtenir une troisième valeur x_3 qui sera plus précise. Et ainsi de suite nous poursuivons l'itération indéfiniment²⁰.

[Proposition 5]

$$\sqrt{A} = \frac{\sqrt{Ab^2}}{b}$$

Exemple

$$\sqrt{5} = \frac{\sqrt{5 \cdot 9}}{3} = \frac{\sqrt{45}}{3} = \frac{6 + \frac{5}{7}}{3} = 2 + \frac{2}{7} + \frac{2}{3} \left(\frac{1}{7} \right).$$

Preuve

La preuve est basée sur la relation $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$.

$$\text{Effectivement, } \frac{\sqrt{Ab^2}}{b} = \frac{\sqrt{A} \cdot \sqrt{b^2}}{b} = \frac{\sqrt{A} \cdot b}{b} = \sqrt{A}.$$

[Remarques :]

- 5- Le choix de b très grand assure la précision de la valeur approchée.
- 6- Ce procédé d'approximation est très utilisé dans le domaine de l'astronomie. Aussi, les valeurs attribuées à b sont des puissances supérieures de 60.
- 7- Ce procédé d'approximation peut être utilisé aussi pour le calcul de la racine carrée des fractions.

[Proposition 6]

Si a et b sont des carrés parfaits alors :

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

²⁰ - L'auteur a précisé qu'il est possible de décomposer un nombre indéfiniment. Ce qui signifie qu'il est possible d'écrire un nombre irrationnel comme une somme infinie de nombres rationnels.

Si a et b ne sont pas des carrés parfaits alors :

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a.b}}{b}$$

Exemples [application de la première formule]

$$1- \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}, \quad 2- \sqrt{\frac{4}{8} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{8}\right)} = \sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4}, \quad 3- \sqrt{2 + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$$

$$4- \sqrt{1 + \frac{2}{5} + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}\right)} ? \quad : \quad \sqrt{1 + \frac{2}{5} + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}\right)} = \sqrt{\frac{36}{25}} = \frac{6}{5} = 1 + \frac{1}{5}$$

Exemples [application de la deuxième formule]

$$1- \sqrt{\frac{5}{6}} = \frac{\sqrt{5.6}}{6} = \frac{\sqrt{30}}{6} \approx \frac{5 + \frac{1}{2}}{6} = \frac{5}{6} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\right)$$

$$2- \sqrt{2 + \frac{1}{2}} ?,$$

$$\sqrt{2 + \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{5}{2}} = \frac{\sqrt{10}}{2} \approx \frac{3 + \frac{1}{6}}{2} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^{21}.$$

Quelques [résultats] généraux sur l'extraction de la racine carrée des fractions et des entiers [liés] aux fractions

[Résultat 1]

Pour tout entier a le nombre $\left[\left(\left(a - \frac{1}{9} \right) + \frac{1}{2} \left(a - \frac{1}{9} \right) \right)^2 + a \right]$ est un carré et

$$\sqrt{\left[\left(\left(a - \frac{1}{9} \right) + \frac{1}{2} \left(a - \frac{1}{9} \right) \right)^2 + a \right]} = a + \frac{1}{2}a + \frac{1}{6}.$$

Exemple

$$a = 10$$

$$\left[\left(\left(10 - \frac{1}{9} \right) + \frac{1}{2} \left(10 - \frac{1}{9} \right) \right)^2 + a \right] = \left(14 + \frac{5}{6} \right)^2 = 230 + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{9}\right).$$

$$\text{Et } \sqrt{230 + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{9}\right)} = 15 + \frac{1}{6} = 10 + 5 + \frac{1}{6}.$$

²¹ - L'auteur a donné le résultat sans simplification ainsi : $1 + \frac{3}{6} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\right)$.

[Résultat 2]

Pour tout entier a le nombre $\left[\left[2 \left(a - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{8} \right) \right) \right]^2 + a \right]$ est un carré et

$$\sqrt{\left(2a + \frac{1}{8} \right)^2 + a} = 2a + \frac{1}{8}$$

Exemple

$$a = 9$$

$$\left[2 \left(9 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{8} \right) \right) \right]^2 + 9 = \left(2 \left(8 + \frac{7}{8} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{8} \right) \right) \right)^2 + 9 = \left(17 + \frac{7}{8} \right)^2 + 9 = 328 + \frac{4}{8} + \frac{1}{8} \left(\frac{1}{8} \right)$$

$$\text{Et } \sqrt{328 + \frac{4}{8} + \frac{1}{8} \left(\frac{1}{8} \right)} = 18 + \frac{1}{8} = 2.9 + \frac{1}{8}.$$

[Résultat 3]

Pour tout entier a le nombre $\left[\left[2 \left(a - \frac{1}{5} \left(\frac{1}{5} \right) \right) + \frac{1}{2} \left(a - \frac{1}{5} \left(\frac{1}{5} \right) \right) \right]^2 \times a \right]$ est un carré et

$$\sqrt{\left[\left[2 \left(a - \frac{1}{5} \left(\frac{1}{5} \right) \right) + \frac{1}{2} \left(a - \frac{1}{5} \left(\frac{1}{5} \right) \right) \right]^2 \times a \right]} = 2a + \frac{1}{2}a + \frac{1}{10}$$

Exemple

$$a = 6$$

$$6 - \frac{1}{5} \left(\frac{1}{5} \right) = 5 + \frac{4}{5} + \frac{4}{5} \left(\frac{1}{5} \right)$$

$$2 \left(5 + \frac{4}{5} + \frac{4}{5} \left(\frac{1}{5} \right) \right) + \frac{1}{2} \left(5 + \frac{4}{5} + \frac{4}{5} \left(\frac{1}{5} \right) \right) = 14 + \frac{9}{10}$$

$$\left(14 + \frac{9}{10} \right)^2 = 222 + \frac{1}{10} \left(\frac{1}{10} \right)$$

$$222 + \frac{1}{10} \left(\frac{1}{10} \right) + 6 = 228 + \frac{1}{10} \left(\frac{1}{10} \right)$$

$$\sqrt{228 + \frac{1}{10} \left(\frac{1}{10} \right)} = 15 + \frac{1}{10} \quad \text{Et } 15 + \frac{1}{10} = 2.6 + \frac{1}{2}(6) + \frac{1}{10}$$

[Résultat 4]

Pour tout entier a le nombre $\left[\left(3 \left(a - \frac{1}{6} \left(\frac{1}{6} \right) \right) \right)^2 + a \right]$ est un carré et

$$\sqrt{\left[\left(3 \left(a - \frac{1}{6} \left(\frac{1}{6} \right) \right) \right)^2 + a \right]} = 3a + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{6} \right).$$

Exemple

$$a=6$$

$$6 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{6} \right) = 5 + \frac{5}{6} \left(\frac{1}{6} \right)$$

$$3 \left(5 + \frac{5}{6} \left(\frac{1}{6} \right) \right) = 17 + \frac{5}{6} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{6} \right)$$

$$\left[17 + \frac{5}{6} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{6} \right) \right]^2 = 321 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{8} \left(\frac{1}{9} \right) \right)$$

$$321 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{8} \left(\frac{1}{9} \right) \right) + 6 = 327 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{8} \left(\frac{1}{9} \right) \right)$$

$$\text{Et } \sqrt{327 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{8} \left(\frac{1}{9} \right) \right)} = 18 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{6} \right) = 3.6 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{6} \right).$$

[Résultat 5]

Pour tout entier a le nombre $\left[\left[3 \left(a - \frac{1}{7} \left(\frac{1}{7} \right) \right) + \frac{1}{2} \left(a - \frac{1}{7} \left(\frac{1}{7} \right) \right) \right]^2 + a \right]$ est un carré et :

$$\sqrt{\left[\left[3 \left(a - \frac{1}{7} \left(\frac{1}{7} \right) \right) + \frac{1}{2} \left(a - \frac{1}{7} \left(\frac{1}{7} \right) \right) \right]^2 + a \right]} = 3a \left(\frac{1}{2} a + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{7} \right) \right).$$

Exemple

$$a=8$$

$$\left[3 \left(8 - \frac{1}{7} \left(\frac{1}{7} \right) \right) + \frac{1}{2} \left(8 - \frac{1}{7} \left(\frac{1}{7} \right) \right) \right]^2 = 780 + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{7} \left(\frac{1}{7} \right) \right)$$

$$780 + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{7} \left(\frac{1}{7} \right) \right) + 8 = 788 + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{7} \left(\frac{1}{7} \right) \right)$$

$$\text{Et } \sqrt{788 + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{7} \left(\frac{1}{7} \right) \right)} = 28 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{7} \right) = 3 \cdot 8 + \frac{1}{2} \cdot 8 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{7} \right)$$

[Résultat 6]

Pour tout entier a le nombre $\left[\left(4 \left(a - \frac{1}{8} \left(\frac{1}{8} \right) \right) \right)^2 + a \right]$ est un carré et

$$\sqrt{\left[\left(4 \left(a - \frac{1}{8} \left(\frac{1}{8} \right) \right) \right)^2 + a \right]} = 4a + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{8} \right).$$

Exemple

$$a = 9$$

$$\left(4 \left(9 - \frac{1}{8} \left(\frac{1}{8} \right) \right) \right)^2 = 1291 + \frac{4}{8} + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{8} \left(\frac{1}{8} \right) \right)$$

$$\sqrt{1291 + \frac{4}{8} + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{8} \left(\frac{1}{8} \right) \right) + 9} = 36 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{8} \right)$$

[Résultat 7]

Pour tout entier a le nombre $\left[\left[4 \left(a - \frac{1}{9} \left(\frac{1}{9} \right) \right) + \frac{1}{2} \left(a - \frac{1}{9} \left(\frac{1}{9} \right) \right) \right]^2 + a \right]$ est un carré et

$$\sqrt{\left[\left[4 \left(a - \frac{1}{9} \left(\frac{1}{9} \right) \right) + \frac{1}{2} \left(a - \frac{1}{9} \left(\frac{1}{9} \right) \right) \right]^2 + a \right]} = 4a + \frac{1}{2}a + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{9} \right).$$

Exemple

$$a = 10$$

$$\left(\left[4 \left(10 - \frac{1}{9} \left(\frac{1}{9} \right) \right) + \frac{1}{2} \left(10 - \frac{1}{9} \left(\frac{1}{9} \right) \right) \right] \right)^2 = 2020 + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{9} \left(\frac{1}{9} \right) \right)$$

$$\sqrt{2020 + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{9} \left(\frac{1}{9} \right) \right) + 10} = 45 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{9} \right) = 4 \cdot 10 + \frac{1}{2} \cdot 10 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{9} \right).$$

[Résultat 8]

Pour tout entier a le nombre $\left(5 \left(a - \frac{1}{10} \left(\frac{1}{10} \right) \right) \right)^2 + a$ est un carré et

$$\sqrt{\left(5 \left(a - \frac{1}{10} \left(\frac{1}{10} \right) \right) \right)^2 + a} = 5a + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{10} \right).$$

Exemple

$$a=11$$

$$\left(5\left(11 - \frac{1}{10}\left(\frac{1}{10}\right)\right)\right)^2 + 11 = 3030 + \frac{5}{10} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{10}\left(\frac{1}{10}\right)\right)$$

$$\text{Et } \sqrt{3030 + \frac{5}{10} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{10}\left(\frac{1}{10}\right)\right)} = 55 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{10}\right) = 5.11 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{10}\right).$$

[Résultat 9]

Pour tout entier a le nombre $\left[\left(5\left(a - \frac{1}{11}\left(\frac{1}{11}\right)\right)\right) + \frac{1}{2}\left(a - \frac{1}{11}\left(\frac{1}{11}\right)\right)\left(a - \frac{1}{11}\left(\frac{1}{11}\right)\right) + a\right]$ est

un carré et $\sqrt{\left[\left(5\left(a - \frac{1}{11}\left(\frac{1}{11}\right)\right)\right) + \frac{1}{2}\left(a - \frac{1}{11}\left(\frac{1}{11}\right)\right)\left(a - \frac{1}{11}\left(\frac{1}{11}\right)\right) + a\right]} = 5a + \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{11}\right).$

Exemple

$$a = 12$$

$$\left(5\left(12 - \frac{1}{11}\left(\frac{1}{11}\right)\right)\right) + \frac{1}{2}\left(12 - \frac{1}{11}\left(\frac{1}{11}\right)\right)\left(12 - \frac{1}{11}\left(\frac{1}{11}\right)\right) + 12 = 4362 + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{11}\left(\frac{1}{11}\right)\right)$$

$$\sqrt{4362 + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{11}\left(\frac{1}{11}\right)\right)} = 66 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{11}\right) = 5.12 + 6 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{11}\right).$$

Problème

Trouver un nombre composé d'un entier, qui se termine par 25, et d'une fraction $\left(\frac{p}{q} < 1\right)$.

[Solution]²²

55225 est le plus petit entier carré qui se termine par 25 avec $55225 = (235)^2$.

[Première méthode]

Soit alors le nombre $N = 55225 + \frac{1}{2}(235) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{8}\right)$

Ce nombre vérifie $55225 + \frac{1}{2}(235) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{8}\right) = 55342 + \frac{4}{8} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{8}\right)$ qui est un carré dont

la racine est $\sqrt{N} = 235 + \frac{1}{4}$.

²² - Pour le calculer la solution, on se sert de l'identité $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$.

[Deuxième méthode]

Nous avons $235 = 5 \times 47$ et considérons le nombre $N = 55225 + \frac{1}{2}(47) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{10}\right)$.

Ce nombre vérifie $N = 55248 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{10}\left(\frac{1}{10}\right)\right)$ qui est un carré dont la racine est

$$\sqrt{N} = 235 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{10}\right).$$

III- 1. 5. Edition et analyse mathématique d'une section du
Tuhfat at-tullāb wa umniyat al-ḥussāb fī sharḥ mā
ashkala min Rafʻ al-ḥijāb d'Ibn Haydūr
Ms. Vatican, n°1403
ff. 39b-40a

[39ظ] // قال الشيخ :

(مبرهنة) " فإذا أردت كعب عدد غير مكعب فاجعل كعبه ضلع المكعب قبله وشيئا ثم كعبه وتسقط المكعب الخارج في الضرب وتقابل بما يبقى من الأشياء والأموال فضل ما بين عددك المفروض والعدد الخارج من الضرب وتزيد الشيء على ما معه من العدد متى كان خارج الضرب أقل من عددك المفروض وتتقصه منه متى كان أكثر يكون الكعب بتقريب".

5

قال الشارح "الذي ذكر في هذا الفصل هو أخذ ضلع المكعب بتقريب كما يؤخذ جذر العدد بتقريب. ومثال ذلك: إذا أردت أخذ ضلع عشرة مثلا.

فإنك تجعل ضلعها إثنتين وشيئا وتكعبه بأن تكعب كل واحد من العددين أعني العدد والشيء يخرج لك ثمانية من العدد وكعب ثم تربع كل واحد منهما وتضرب مربع أحدهما في ثلاثة أمثال الآخر يخرج لك من ذلك ستة أموال وإثنا عشر شيئا فيكون معك من تكعيبه ثمانية من العدد وكعب وستة أموال وإثني عشر شيئا على ما ذكرت لك.

10

وكذلك أبدا إذا أردت تكعيب عدد وقسمته بقسمين فإنك تكعب كل واحد من القسمين وتضرب مربع كل واحد منهما في ثلاثة أمثال الآخر وتجمع الخارجات يكون مكعب العدد. ثم تسقط الكعب ليقع به التقريب. وترجع المسألة إلى معادلة أصلية : فيكون ستة أموال وإثني عشر شيئا وثمانية من العدد يعدل عشرة من العدد. فتذهب الثمانية بثمانية من العشرة فيبقى معك ستة أموال وإثني عشر شيئا يعدل إثنتين من العدد. فترد كل ما معك إلى سدسه وترجع المعادلة إلى مال وشيئين يعدل ثلثا من العدد فتعمل حكم الرابعة يخرج لك الشيء جذر واحد وتلث إلا واحدا. فتحمل عليه الإثنتين لأن خارج ضرب العدد أقل من عشرة العدد المطلوب ضلعه, يخرج لك كعب عشرة بتقريب وذلك واحد [40] // وجذر واحد وتلث".

15

قال الشيخ "وأخذ ضلع المكعب طويل العمل قليل الجدوى ولأجل هذا تركنا أخذ ضلع المكعب ولو كان الجذر يخرج بالجبر بغير العمل المذكور الموضوع له ما ذكرنا تقريبه لأن الجذر أصل للجبر فاعلمه".

قال الشارح:

20

[ملاحظة] "أجاب المؤلف في هذا الفصل عن كونه لم يضع في كتابه كيف تؤخذ أضلاع المكعبات كما وضع للجذور والذي قاله بين لأنه قليل الجدوى في العلوم مع طوله وتشعبه وصعوبة برهانه. وذكر أيضا في أخذ الجذور بتقريب، أنه لو كان يخرج بالجبر ما ذكر عمل تقريبه لكنه لا يخرج بالجبر لأن الجذر أصل للجبر وهو من مواد الجبر يستعمل بالجذر ولا ينعكس.

3- قبله وشيئا : قبله أو بعده وشيئا// 12- ثم تسقط الكعب ليقع به : (أي من القسمين : كتبت فوق هذه الجملة بخط رقيق) //

19- استعمل الناسخ رموز الأعداد العروفة في المشرق.

ANALYSE MATHÉMATIQUE

[Proposition]

Si on veut calculer la racine cubique d'un nombre $[A]$ qui n'est pas un cube parfait, [on pose $A=n^3+r$ avec $n^3 < A < (n+1)^3$].

On pose [également] $\sqrt[3]{A}=n+x$ ou bien $[n+1=\sqrt[3]{A}+x \dots (*)]$.

Puis, on élève au cube et on obtient : $A=n^3+3n^2x+3nx^2+x^3$, $[\sqrt[3]{A}=(n+1)-x$ et $A=(n+1)^3-3(n+1)^2x+3(n+1)x-x^3]$.

D'où $A \approx n^3+3n^2x+3nx^2$ [et $A \approx (n+1)^3-3(n+1)^2x+3(n+1)x^2 \dots (**)$ équation du second degré à résoudre].

$A-n^3=3n^2x=3nx^2 \dots$ c'est la [quatrième] équation [dans le classement d'al-Khwārizmī] dont la solution trouvée x sera rajoutée à l'entier n puisque $n^3 < A$: la somme $(n+x)$ serait alors la racine cubique approchée du nombre A .

[Pour le cas (*)] la solution [de l'équation (**)] sera retranchée de l'entier $(n+1)$ [puisque] $A < (n+1)^3$: la différence $((n+1)-x)$ serait la racine cubique approchée du nombre A].

Exemple de cela

Calculer $\sqrt[3]{10}$?

[Comme $8[=2^3] < 10 < 27[=3^3]$,] on pose $\sqrt[3]{10}=2+x$ d'où : $(2+x)^3 [= (\sqrt[3]{10})^3]$

$(2+x)^3=8+x^3+6x^2+12x$ et ce en appliquant la formule suivante : $(a+b)^3=a^3+b^3+3a^2b+3ab^2$. [On obtient $10=8+x^3+6x^2+12x$ (1)].

En posant $x^3 \approx 0$ l'équation (1) sera équivalente à $6x^2+12x+8=10$ (2)

D'où $6x^2+12x=2$. En divisant par 6, on obtient $x^2+2x=\frac{1}{3}$ qui est la quatrième équation [d'al-Khwārizmī].

D'où $x=\sqrt{1+\frac{1}{3}}-1$ et $\sqrt[3]{10} \approx 2+\left(\sqrt{1+\frac{1}{3}}-1\right)$ puisque $10 > \left(2+\sqrt{1+\frac{1}{3}}-1\right)^3$.

Par conséquent $\sqrt[3]{10} \approx 1+\sqrt{1+\frac{1}{3}}$.

[Remarque]

L'auteur [Ibn al-Bannā] n'a pas exposé l'algorithme d'extraction de la racine cubique d'un nombre entier car en plus du fait qu'il est long il est difficile de prouver sa validité.

III- 1. 5. Edition et analyse d'une section du
Takhṣīṣ ūlī al-albāb fī sharḥ talkhīṣ a'ômāl al-ḥisāb
d'al-Ghurbī
Ms. Alger, B.N, n°2712, ff. 100b-105a
&
Ms. Rabat, B.G, n°328D, pp. 420-429

Introduction

L'édition de la section consacrée aux approximations dans l'ouvrage d'al-Ghurbī, intitulé *Takhṣīṣ ūlī al-albāb fī sharḥ talkhīṣ aḥmāl al-ḥisāb*, est réalisée à partir de deux manuscrits : Le premier se trouve dans la bibliothèque générale de Rabat sous le numéro 328D. Quant au deuxième, il est catalogué sous le numéro 2712 dans la bibliothèque nationale d'Alger.

Les autres copies de cet ouvrage, qui ont été retrouvées, sont répertoriées ainsi :

1- Ms Tétouan n° 844

Cette copie est tronquée et ne contient pas le nom de l'auteur²³.

2- Ms Caire 819 Dār ar-riyāḍa :

Cette copie ne comporte que 17 folios²⁴.

Le manuscrit de Rabat est un recueil qui comporte quatre œuvres dont celle d'al-Ghurbī qui occupe ff 273-509. Bien que cette copie soit incomplète elle est la seule qui conserve le début de l'ouvrage.

Le manuscrit d'Alger est acéphale et ne contient aucune information sur l'auteur du texte ni sur le copiste. Il était classé anonyme jusqu'à ce que nous l'ayons identifié avec le professeur A. Djebbar. Il comporte 149 folios qui sont consacrés uniquement à l'œuvre d'al-Ghurbī.

Cette copie se distingue des autres par le fait qu'elle contient une étude sur quelques propriétés des nombres. Al-Ghurbī l'a présentée comme annexe qu'il a intitulée *bāb al-ādad at-tām wa z-zā'id wa n-nāqiṣ wa l-'aḥdād al-mutaḥābba* [chapitre sur le nombre parfait, le nombre abondant, le nombre déficient et les nombres amiables].

Le manuscrit d'Alger nous a permis d'identifier un manuscrit de Tunis : Ms. Tunis, B.N. n°345, qui était attribué à Ibn al-Bannā puis à Ibn Haydūr. Grâce à cette copie d'Alger, nous avons pu établir que le texte contenu dans ce manuscrit de Tunis est précisément le dernier chapitre du commentaire d'al-Ghurbī qui contient l'étude sur les propriétés des nombres²⁵.

Dans cette édition, nous avons évoqué les folios que nous avons étudiés en utilisant la formulation suivante : (مخ.ج) pour le manuscrit d'Alger et (مخ.ر) pour le manuscrit de Rabat.

²³- Al-Manouni a mentionné les deux copies celle de Rabat et celle de Tétouan mais il n'a pas identifié la dernière.

²⁴- AL-MĀNŪNĪ, M. : Nash'at ad-dirāsāt ar-riyāḍiyya fī maghrib al-ḥaṣr al-wasīṭ ar-rābi' [Activités des études mathématiques dans le Maroc de la quatrième période du moyen-âge], *al-Manāhil*, Rabat, n°33, 1985, pp. 77-115.

²⁵- HARBILI, A. : Le Takhṣīṣ d'al-Ghurbī : Un commentaire inédit du Talkhīṣ d'Ibn al-Bannā, *Actes du huitième colloque meghrēbin sur l'histoire des mathématiques arabes*, (Tunis, 18-20 Décembre 2004), Tunis, Publication de l'Association Tunisienne des Sciences Mathématiques, 2006, pp. 199-216.

[مخ.ج:100ظ] // [مخ.ر:420] // قال "وان بقي شيء فسمه من ضعف الجذر الصحيح إن كان مثل الجذر أو أقل منه، وإن كان أكثر من الجذر فزد فيه واحدا وفي الجذر المضاعف إثنين ثم تسمي منه وتزيد التسمية على الجذر الصحيح فما كان فهو الجواب والذي يضرب في نفسه فيأتي منه المطلوب جذره بتقريب".

اعلم أن الوجه الذي قبل هذا في استخراج جذر العدد الذي له جذر بالتحقيق وهذا الوجه في استخراج الجذر بالتقريب فيما لا جذر له. وقد تقدم أن العدد على قسمين مجذور وغير مجذور: فالمجذور هو الذي تركب من ضرب عدد في مثله، وغير المجذور منه ما هو مركب ومنه ما هو غير مركب وعلى كلا التقديرين [مخ.ج:101و] // فليس له جذر محقق ولكن يستخرج جذره بالتقريب. ووجه العمل في استخراج الجذر أن تنظر أقرب المجذورين إلى العدد المطلوب جذره إما الذي قبله أو الذي بعده. ولم يذكر المصنف إلا العمل بالذي قبله [مخ.ر:421] // ونحن نبين العمل بالذي بعده بعد بسط كلامه إن شاء الله تعالى.

10 (مبرهنة-1) فإذا نظرت أقرب المجذورات إليه قبله يليه تنظر الفضل بين المجذور وبين المطلوب جذره بتقريب فتسمي ذلك الفضل من ضعف الجذر الصحيح، وهذا معنى قوله وان بقي شيء فسمه من ضعف الجذر الصحيح إن كان ذلك الشيء الباقي مثل الجذر أو أقل منه فما كان فهو جذر ذلك العدد المطلوب جذره بتقريب. وإن كان ذلك الشيء الباقي أكثر من الجذر فوجه العمل فيه أن تزيد في ذلك الفضل واحدا أبدا وفي ضعف الجذر اثنين أبدا ثم تسمي ذلك الفضل بزيادته من الجذر المضاعف بزيادته فما خرج زدته على الجذر الصحيح فما كان فهو الجذر. 15

فإذا عرفت هذا فنقول لا يخلو الفضل بين المجذور وبين المطلوب جذره بتقريب إما أن يكون أقل من الجذر أو مثله أو أكثر منه.

مثال الأول: كم جذر خمسة 5 ؟

20 فتتظر أقرب المجذورات إليها قبلها ليس إلا أربعة 4 . فتتظر الفضل بينهما فتجده واحدا 1 فتأخذ جذر الأربعة هو اثنان 2 فتضعفه فيصير أربعة 4 فتسمي ذلك الواحد الزائد من الأربعة فيكون [مخ.ج:101ظ] // ربعا $\frac{1}{4}$ فتجمعه مع الجذر يكون الجميع إثنين وربعاً $\frac{1}{4}2$ وهو جذر خمسة بتقريب.

واختبار هذه المسألة بأن تضرب هذا الجذر في مثله على ما مر في ضرب الكسور يخرج خمسة وربع الربع $\frac{10}{4}5$ وهذا الزائد هو التقريب ولا يكون الخارج أبداً إلا أزيد من المطلوب [مخ.ر:422] // جذره بتقريب.

ومثال ما يكون الفضل فيه مثل الجذر: إذا قيل لك كم جذر ستة 6 ؟

25 فتعمل على ما تقدم فيكون الفضل إثنين 2 فتسميه من أربعة 4 التي هي ضعف الجذر يخرج نصف $\frac{1}{2}$ فتجمعه مع الجذر يخرج اثنان ونصف $\frac{1}{2}2$ وهو جذر ستة. فإذا ضرب هذا الجذر في مثله كان الخارج ستة وربعاً $\frac{1}{4}6$ وهذا الزائد هو التقريب.

ومثال ما يكون الفضل فيه أكثر من الجذر: كم جذر سبعة 7 ؟

30 فتعمل على ما ذكرناه فتجد الفضل ثلاثة 3 والجذر إثنين 2، فلا يمكن هنا إلا أن تزيد على الفضل واحداً فيصير أربعة 4 وتزيد على الجذر المضاعف إثنين فيصير ستة 6. فتسمي الأربعة من الستة يخرج ثلثان $\frac{2}{3}$ فتجمعهما إلى الجذر الصحيح يكون المجتمع إثنين وثلثين $\frac{2}{3}2$ وهو الجذر بتقريب فإذا ضرب في مثله يخرج سبعة وثلثاً

2- أكثر من : مثل (مخ.ج) / تسمي : سمي (مخ.ج)4-استخراج جذر العدد : استخراج العدد (مخ.ج)6- كلا : في الهامش (مخ.ج)8-أقرب : مطموسة (مخ.ر)10-قبله يليه : في الهامش (مخ.ج)11-وهذا معنى...الجذر الصحيح : جملة محذوفة (مخ.ر)19-1: محذوف (مخ.ج)21- وهو : مكررة (مخ.ج) // 24- قيل لك : قيل (مخ.ر) // 31-الجذر الصحيح : الجذر (مخ.ر)/المجتمع : الجميع (مخ.ر).

الثالث 7 $\frac{1}{3}$ وهذا الزائد هو التقريب.

وقوله "والذي يضرب في نفسه فيأتي منه المطلوب جذره بتقريب" أي وهذا الجواب الذي هو [مخ.ج:102] // مجموع الجذر الصحيح إلى التسمية هو الذي يضرب في نفسه فيخرج العدد المطلوب جذره بتقريب والله أعلم. فهذه الأوجه الثلاثة هي التي ذكر المصنف. وأما الوجه الذي لم يذكره، وهو العمل بالمجذور الذي يليه بعده. فوجهه أن:

5

(ميرهنة-2) تنظر الفضل بين العدد المطلوب جذره بتقريب وبين المجذور الأعلى وهو لا يخلو أيضا من ثلاثة أحوال: إما أن يكون مثل الجذر أو أقل [مخ.ر:423] // منه أو أكثر منه. فإن كان مثله أو أقل منه فسمه من ضعف الجذر وأسقط تلك النسبة من الجذر الصحيح فما بقي فهو جذر العدد المطلوب جذره بتقريب. وإن كان الفضل بين المطلوب جذره بتقريب وبين المجذور بعده يليه أكثر من الجذر فأنقص واحدا من الفضل وإثنين من ضعف الجذر ثم سم الباقي من الفضل من الباقي من ضعف الجذر ثم أسقط تلك النسبة من الجذر فما بقي فهو جذر العدد المطلوب جذره بتقريب.

10

مثال ما يكون الفضل فيه أقل من جذر الأعلى: كم جذر ثمانية 8 ؟
فتتظر أقرب المجذورات إليها بعدها تليها فليس إلا تسعة 9 . فتتظر الفضل بينهما فتجده واحدا 1 فتسميه من ضعف الجذر وذلك سدس $\frac{1}{6}$ ، فتسقطه من الجذر الذي هو ثلاثة 3 يبقى إثنان وخمسة أسداس $\frac{5}{6}$ 2 وهو جذر ثمانية. فإذا ضرب في مثله كان الخارج ثمانية وسدس السدس $\frac{1}{6}$ 8 وهذا الزائد هو التقريب.

15

ومثال ما يكون [مخ.ج:102 ظ] // الفضل فيه مثل الجذر: كم جذر إثني عشر 12؟
فتتظر أقرب المجذورات إليها بعدها يليها فتجد ذلك ستة عشر 16. فتجد الفضل بينهما أربعة 4 وهو جذر الأعلى فتسميها من ضعف الجذر يخرج نصف $\frac{1}{2}$ فتتقصه من الجذر يبقى ثلاثة ونصف $\frac{1}{2}$ 3 وهي جذر إثني عشر بتقريب. فإذا ضرب ذلك في مثله يكون الخارج إثني عشر [مخ.ر:424] // وربعا $\frac{1}{4}$ 12 وهذا الزائد هو التقريب.

20

ومثال ما يكون الفضل فيه أكثر من جذر الأعلى: كم جذر عشرة 10 ؟
فتتظر أقرب المجذورات إليها بعدها يليها فتجده ستة عشر 16. فتتظر الفضل بينهما فتجده 6 ستة، فتسقط منه واحدا يبقى خمسة 5 فتسقط من ضعف الجذر إثنين يبقى ستة 6 فتسمي الخمسة من الستة يخرج خمسة أسداس $\frac{5}{6}$ ، فتسقطها من الجذر يبقى ثلاثة وسدس $\frac{1}{6}$ 3 وهو جذر عشرة. فإذا ضرب ذلك في مثله يكون الخارج عشرة وسدس السدس $\frac{1}{6}$ 10 وهذا الزائد هو التقريب.

25

وقد بان وجه العمل بالطريقتين والله أعلم.
قال "وإن أردت تدقيق التقريب فسمه من ضعف الجذر واسقط الخارج من الجذر يبقى جذر مربعه أقرب إلى العدد المطلوب جذره من المربع الأول".

اعلم أنه قد تقدم أن لفظ التقريب في الاصطلاح موضوع للزيادة التي خرجت في الضرب أعني ضرب ذلك الجذر في مثله وتلك الزيادة لا تكون [مخ.ج:103] // إلا كسرا. ثم إن هذا الكسر قد يكون بعيدا عن المربع

30

4-الأوجه الثلاثة : الأوجه الأربعة الثلاثة (مخ.ر) // 13-تليها : يليها (مخ.ر) // 1- محذوفة (مخ.ج) // 14- 3 : محذوفة (مخ.ج) // 16- ما يكون الفضل فيه : ما يكون فيه الفضل فيه (مخ.ج) // اثني : اثنا (مخ.ر) // 17- 4 : محذوفة (مخ.ج) // 21- الفضل فيه : محذوفة (مخ.ر) // 23- الجذر : مطموسة (مخ.ج) // 24- $\frac{5}{6}$: على الهامش (مخ.ج) // 29- للزيادة : للتقريب (مخ.ج) // 30- عن المربع : عن الخارج من المربع (مخ.ر).

الذي هو العدد المطلوب جذره بتقريب، فإذا كان بعيدا عنه فلنطلب تدقيقه ليكون ما هو أدق منه أقرب إلى العدد المطلوب جذره بتقريب.

وقد تقدم أن الكسور تتفاضل بالأكبرية والأصغرية فإذا عرفت هذا فوجه العمل فيه:

(ميرهنة-3) أن تأتي إلى ذلك التقريب وتسميه من ضعف الجذر الذي خرج بعد [مخ.ر:425] // العمل لا من ضعف الجذر الصحيح فما كان أسقطته من ذلك الجذر أيضا نفسه. فما بقي ضربته في نفسه فإن الخارج حينئذ يكون أدق.

ومثاله في جذر خمسة فإنه كان تقدم أن جذرها بتقريب إثنان وربع $\frac{1}{4}2$ وكان الخارج من ضرب هذا الجذر في نفسه خمسة وربع الربع هكذا $\frac{10}{4}5$. فتسمي ربع الربع من ضعف الجذر وهو أربعة ونصف $\frac{1}{2}4$ يكون

الخارج ثمن التسع $\frac{1}{8}0$ فتسقطه من الجذر الذي هو إثنان وربع $\frac{1}{4}2$ يكون الباقي إثنين وتسعين وثمان التسع

الأول الذي هو خمسة وربع الربع. والخارج هنا من ضربته في مثله خمسة وثمان ثمن تسع التسع $2 \frac{0}{4} \frac{1}{8} \frac{2}{9}$. وهذا هو الجذر الذي إذا ضرب في نفسه يكون الخارج من ضربه أقرب إلى الخمسة من الخارج

5 $\frac{001000}{448899}$. وهذا الزائد هو التقريب، ولا شك أنه أدق من ربع الربع بكثير وهو ظاهر لمتأمليه.

وكذلك لو أردت [مخ.ج:103ظ] // تدقيق هذا التقريب فعلت معه ومع الجذر الذي هو إثنان وتسعان وثمان التسع ما فعلت أولا، فإنه يخرج أدق إلى ما لا نهاية له والله أعلم.

15 قال "وفي التقريب وجه آخر وهو أن يضرب العدد المطلوب جذره في عدد مربع أعظم منه ويؤخذ جذر

المجتمع بتقريب ويقسم على جذر المربع المضروب فيه فما خرج فهو المطلوب".

اعلم أن هذا وجه آخر في أخذ الجذر بتقريب [مخ.ر:426] // ووجه العمل فيه:

(ميرهنة-4) أن تعمد إلى العدد المطلوب جذره، فتتظر إلى الأعداد المجذورة أعلا منه فتضربه فيه، وإلى هذا أشار بقوله "في عدد مربع أعظم منه" فإذا ضربته فيه حفظت الخارج. ولتعلم أن هذا الخارج لا جذر له لأن

20 الخارج من الضرب لا يكون له جذر إلا إذا كان للمضروبين معا جذر أعني أن كل واحد منهما على حدته

مجذورا ولا يكون لواحد منهما جذر. أما إذا كان أحدهما مجذورا والآخر غير مجذور فإنه لا جذر للخارج. فإذا عرفت هذا فلتأخذ جذر الخارج بتقريب على ما مر فإذا عرفته فاقسمه على جذر المربع المضروب فيه فما خرج فهو جذر العدد المطلوب جذره بتقريب.

ومثاله كم جذر خمسة بتقريب 5 ؟

25 فتتظر أقرب المجذورات إليها بعدها يليها فليس إلا تسعة 9 فتضرب خمسة في تسعة يخرج خمسة وأربعون 45،

فتأخذ جذرها بتقريب فتجده ستة وخمسة أسداس $\frac{5}{6}6$ [ج:104و] // فتقسمها على ثلاثة 3 التي هي جذر التسعة

يكون الخارج إثنين وتسعين ونصف التسع $\frac{1}{2}2$ وهو جذر خمسة بتقريب. فإذا ضرب هذا الجذر في مثله

يكون الخارج خمسة وتسعا وخمسة أتساع التسع وربع تسع التسع $\frac{1}{4}5$ وهذا الزائد هو التقريب. فإذا

أردت تدقيقه فعلت فيه ما تقدم والله أعلم.

30 قال "وأما تجذير الكسور فهو أن يضرب البسط في الإمام ويقسم جذر الخارج على الإمام".

4-ضعف الجذر : ضعف جذر (مخ.ر)7//وكان الخارج : كذلك الخارج (مخ.ر)11//الربع : محذوفة (مخ.ر)13//هذا التقريب : التقريب (مخ.ج) // 15-جذر : مكررة (مخ.ج) // 28-خمسة : مكررة (مخ.ج) / فإذا : فإن (مخ.ر)30//يُضرب : تضرب (مخ.ج) / يقسم : تقسم (مخ.ج)

- اعلم أن هذا [ر:427] // الفصل في تجذير الكسور. ووجه العمل في ذلك أن:
- (مبرهنة-5) تبسط المسألة ثم تضرب ذلك البسط في الإمام وتحفظ الخارج ثم تأخذ جذره إما بتحقيق أو بتقريب فما كان قسمته على الإمام فما خرج فهو جذر ذلك الكسر.
- فإذا عرفت هذا فنقول لا يخلو إما أن يكون البسط مجزورا والأئمة مجذورة وإما أن يكون كل واحد منهما غير مجزور وإما أن يكون البسط مجزورا والإمام غير مجزور وإما أن يكون الإمام مجزورا والبسط غير مجزور. 5
- مثال الأول كم جذر أربعة أتساع $\frac{4}{9}$ ؟
- فهذه المسألة تأخذ فيها جذر البسط وتقسمه على جذر الإمام فما خرج فهو جذر الكسر: والخارج ثلثان $\frac{2}{3}$ وهو جذر المسألة. ولو عملنا بالضرب والقسمة لخرج ستة أتساع وهي ثلثان فأغنى هذا الإختصار عن ذلك.
- ومثال آخر: كم جذر أربعة أثمان ونصف الثمن $\frac{14}{8}$ ؟
- فهذه مثل الأول في العمل والخارج ثلاثة أرباع [ج:104ظ] // $\frac{3}{4}$ وهو جذر المسألة. 10
- ومثال الثاني: كم جذر ثمانية أعشار $\frac{8}{10}$ ؟
- فتضرب البسط في الإمام يخرج ثمانون 80 فتأخذ جذرها بتقريب على ما مر فتجده ثمانية وثمانية أتساع ونصف التسع $\frac{18}{9}$ وهو جذر ثمانين بتقريب. فتقسمه على الإمام الذي هو عشرة يخرج ثمانية أعشار وثمانية أتساع العشر ونصف تسع العشر $\frac{188}{10}$. وإن شئت قلت ثمانية أتساع وربيع خمس التسع $\frac{108}{459}$ وهو جذر ثمانية أعشار بتقريب. فإذا ضرب هذا الجذر في مثله يخرج ثمانية أعشار وربيع تسع تسع عشر [مخ:ر:428] //
- العشر $\frac{10008}{4991010}$ وهذا الزائد هو التقريب والله أعلم. 15
- ومثال الثالث: كم جذر أربعة أسباع $\frac{4}{7}$ ؟
- فتضرب البسط في الإمام يخرج ثمانية وعشرون 28، فتأخذ جذرها بتقريب على ما تقدم فتجده خمسة وثلاثة أعشار $\frac{35}{10}$ ، فتقسمه على الإمام الذي هو سبعة 7 يخرج خمسة أسباع وخمس السبع ونصف خمس السبع $\frac{115}{257}$ وهو جذر أربعة أسباع. فإذا ضرب هذا الجذر في مثله يكون الخارج أربعة أسباع وخمسي خمس سبع 20
- السبع وربيع خمس سبع السبع $\frac{12004}{45577}$ وهذا الزائد هو التقريب.
- ومثال الرابع: كم جذر ثلاثة أرباع $\frac{3}{4}$ ؟
- فتضرب البسط في الإمام يخرج إثنا عشر 12، فتأخذ جذرها بتقريب على ما مر فتجده ثلاثة ونصف $\frac{13}{2}$ فتقسمه على الإمام الذي هو [مخ:ج:105] // أربعة 4 يخرج ثلاثة أرباع ونصف الربع $\frac{13}{24}$ وهو الجذر أعني جذر ثلاثة أرباع. فإذا ضرب في مثله يخرج ثلاثة أرباع ونصف نصف ربع الربع $\frac{1003}{2244}$ وهذا الزائد هو التقريب والله أعلم. 25

5-مجذورا : مجزور (مخ.ر) //7-وهو : وهذا (مخ.ر) // 8-عملنا : عملنا (مخ.ر) // 12-فتأخذ : محذوفة (مخ.ر) // فتجده : فتجد (مخ.ج) // 15-بتقريب. فإذا...عشر : محذوفة (مخ.ر) / ربيع : ربع (مخ.ج) // 22- $\frac{3}{4}$: في الهامش (مخ.ج) // 23-إثنا : إثني (مخ.ر).

قال "وإن كان للبسط جذر منطوق وللإمام مثله فاقسم جذر البسط على جذر الإمام".

(ملاحظة) اعلم أن هذا هو القسم الأول من الأقسام الأربعة التي قدمناها وهو أن يكون للبسط جذر منطوق أي بالتحقيق وللإمام مثله أي جذر منطوق. قال المصنف "فاقسم جذر البسط على جذر الإمام"، وقد [مخ.ر: 429] // قدمنا ذلك ومثلناه بجذر أربعة أتساع وهو ظاهر فأغنى ظهوره عن تكراره.

ANALYSE MATHÉMATIQUE

[**Lemme** : Pour tout nombre non carré A il existe un nombre entier n tel que $n^2 < A < (n+1)^2$]

[Proposition 1]

[En posant $r = A - n^2$, nous avons les formules suivantes :]

$$\text{Si } r \leq n \text{ alors } \sqrt{A} \approx n + \frac{r}{2n}$$

$$\text{Si } r > n \text{ alors } \sqrt{A} \approx n + \frac{r+1}{2n+2}$$

[Exemples]

1- $\sqrt{5} = ?$

$$5 = 2^2 + 1, \quad [n = 2 \text{ et } r = 1]$$

$$\sqrt{5} \approx 2 + \frac{1}{2 \cdot 2} = 2 + \frac{1}{4} \text{ avec } \left(2 + \frac{1}{4}\right)^2 = 5 + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4}\right).$$

$\frac{1}{4} \left(\frac{1}{4}\right)$ est l'erreur commise [par excès].

2- $\sqrt{6} = ?$

$6 = 2^2 + 2$ d'où $\sqrt{6} \approx 2 + \frac{2}{4} = 2 + \frac{1}{2}$ avec $\left(2 + \frac{1}{2}\right)^2 = 6 + \frac{1}{4}$. $\frac{1}{4}$ est l'erreur commise [par excès].

3- $\sqrt{7} = ?$

$$7 = 2^2 + 3 \text{ d'où } \sqrt{7} \approx 2 + \frac{3+1}{2 \cdot 2+2} = 2 + \frac{4}{6} = 2 + \frac{2}{3} \text{ avec } \left(2 + \frac{2}{3}\right)^2 = 7 + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3}\right).$$

[Proposition 2]

[En posant $r = (n+1)^2 - A$, nous avons les formules suivantes:]

$$\text{Si } r \leq (n+1) \text{ alors } \sqrt{A} \approx (n+1) - \frac{r}{2(n+1)}$$

$$\text{Si } r > (n+1) \text{ alors } \sqrt{A} \approx (n+1) - \frac{r-1}{2(n+1)-2}$$

[Exemples]

1- $\sqrt{8} = ?$

$$9 = 8+1 \quad [(n+1) = 3, r = 1]$$

$$\sqrt{8} \approx 3 - \frac{1}{6} = 2 + \frac{5}{6} \text{ avec } \left(2 + \frac{5}{6}\right)^2 = 8 + \frac{1}{6} \left(\frac{1}{6}\right).$$

$$2- \sqrt{12}=?$$

$$16 = 12 + 4 \quad \text{d'où} \quad \sqrt{12} \approx 4 - \frac{4}{2 \cdot 4} = 3 + \frac{1}{2} \quad \text{avec} \quad \left(3 + \frac{1}{2}\right)^2 = 12 + \frac{1}{4}$$

$$3- \sqrt{10}=?$$

$$16 = 10 + 6 \quad \text{d'où} \quad \sqrt{10} \approx 4 - \frac{6-1}{2 \cdot 4 - 2} = 3 + \frac{1}{6} \quad \text{avec} \quad \left(3 + \frac{1}{6}\right)^2 = 10 + \frac{1}{6} \left(\frac{1}{6}\right).$$

[Proposition 3]

Soit x_1 la première approximation obtenue en appliquant une des formules précédentes alors :

$$x_2 = x_1 - \frac{|x_1^2 - A|}{2x_1} \quad \text{est une autre valeur approchée du nombre } \sqrt{A} \text{ qui est plus précise}$$

[et qui vérifie $x_2 < x_1$].

Exemple

$$\sqrt{5} \approx x_1 = 2 + \frac{1}{4} \quad \text{et posons } e_1 = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4}\right) \text{ l'erreur commise [par excès].}$$

$$x_2 = x_1 - \frac{e_1}{2x_1} = 2 + \frac{1}{4} - \frac{\frac{1}{4} \left(\frac{1}{4}\right)}{2 \left(2 + \frac{1}{4}\right)} = 2 + \frac{2}{9} + \frac{1}{8} \left(\frac{1}{9}\right) \quad \text{avec} \quad x_2^2 = 5 + \frac{1}{8} \left(\frac{1}{9} \left(\frac{1}{9}\right)\right).$$

[On pose $e_2 = \frac{1}{8} \left(\frac{1}{9} \left(\frac{1}{9}\right)\right)$ l'erreur commise [par excès qui] est plus petite que e_1 .

Nous pouvons faire les mêmes calculs sur x_2 [et obtenir $x_3 = x_2 - \frac{x_2^2 - A}{2x_2}$ qui vérifie

$$\sqrt{A} \approx x_3 \text{ et } x_3 < x_2 < x_1]$$

Et ainsi de suite on peut poursuivre l'itération indéfiniment.

[Proposition 4]

[Pour tout nombre non carré A nous avons:]

$$\sqrt{A} = \frac{\sqrt{Ab^2}}{b} \quad \text{avec} \quad b^2 > A$$

(Ab^2) n'est pas un nombre carré parfait puisque A ne l'est pas. Dans ce cas, nous appliquons une des formules précédentes pour calculer $\sqrt{Ab^2}$.

Exemples

$$1- \sqrt{5}?$$

Nous avons : $5 < 9 = 3^2$ et $\sqrt{5 \cdot 9} = \sqrt{45} \approx 6 + \frac{5}{6}$ [application de la proposition 1].

$$\text{Par conséquent, } \sqrt{5} \approx \frac{6 + \frac{5}{6}}{3} = 2 + \frac{2}{9} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{9}\right) \quad \text{avec} \quad \left(2 + \frac{2}{9} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{9}\right)\right)^2 = 5 + \frac{1}{9} + \frac{5}{9} \left(\frac{1}{9}\right) + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{9} \left(\frac{1}{9}\right)\right).$$

L'erreur commise est égale à $\frac{1}{9} + \frac{5}{9} \left(\frac{1}{9}\right) + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{9} \left(\frac{1}{9}\right)\right)$ que l'on peut minimiser encore en appliquant la proposition 3.

[Proposition 5]

Pour tous nombres non carrés a et b , nous avons $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{ab}}{b}$

Exemples

$$1- \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3}, \quad \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{4 \cdot 9}}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

$$\sqrt{\frac{4}{8} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{8} \right)} = \sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4}.$$

$$2- \sqrt{\frac{8}{10}} = \frac{\sqrt{8 \cdot 10}}{10} = \frac{\sqrt{80}}{10} \quad \text{et} \quad \sqrt{80} \approx 8 + \frac{8}{9} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{9} \right) \quad \text{d'où :}$$

$$\sqrt{\frac{8}{10}} \approx \frac{8}{10} + \frac{8}{9} \left(\frac{1}{10} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{9} \left(\frac{1}{10} \right) \right) = \frac{8}{9} + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{5} \left(\frac{1}{9} \right) \right).$$

$$\left(\frac{8}{9} + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{5} \left(\frac{1}{9} \right) \right) \right)^2 = \frac{8}{10} + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{9} \left(\frac{1}{9} \left(\frac{1}{10} \right) \right) \right).$$

$$3- \sqrt{\frac{4}{7}} = \frac{\sqrt{28}}{7} \approx \frac{5 + \frac{3}{10}}{7} = \frac{5}{7} + \frac{1}{5} \left(\frac{1}{7} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{5} \left(\frac{1}{7} \right) \right) \quad \text{avec}$$

$$\left(\frac{5}{7} + \frac{1}{5} \left(\frac{1}{7} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{5} \left(\frac{1}{7} \right) \right) \right)^2 = \frac{4}{7} + \left(\frac{2}{5} \left(\frac{1}{5} \left(\frac{1}{7} \right) \right) \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{5} \left(\frac{1}{5} \left(\frac{1}{7} \right) \right) \right)$$

$$4- \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{12}}{4} \approx \frac{3 + \frac{1}{2}}{4} = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} \right) \quad \text{avec} \quad \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} \right) \right)^2 = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} \right) \right)$$

[Remarque]

Si a et b sont des carrés parfaits alors : $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

III- 1. 7. Edition et analyse mathématique d'une section du
Rashf ar-Rudāb min thughūr aômāl al-ḥisāb
d'al-Qaṭrawānī
Ms. Rabat, B.G, n° 416Q
pp. 82-87, 102-105

[82] // (I) الفرع الأول في كيفية استخراج جذر العدد الأصم على التقريب

(مبرهنة-1) إن بقي منه بقية فإن كانت مثل الجذر فأقل فانسبها من ضعف الجذر وإن كانت أكثر فزد في البقية

[83] // واحدا أبدا وزد في ضعف الجذر اثنين وانسب الأقل من الأكثر واحمل مثل تلك النسبة من واحد على

الجذر يكن الجذر المطلوب بتقريب.

5 (ملاحظة) لأن كل عدد غير مربع فإنه واقع بين مربعين يزيد جذر أعظمهما على جذر أصغرهما واحد فيلزم

منه أن كل مربعين متواليين يزيد أكبرهما على الأصغر ضعف جذر الأكبر غير واحد ومثل ضعف جذر

الأصغر وواحد ومثل مجموع الجذرين.

مثاله : كم جذر ثلاثة وأربعين وستمائة وثلاثة آلاف؟

3 6 4 3

ضعها في سطر ما هكذا 6 0 ثم انظر عددا تضعه تحت الستة تضربه في نفسه يفنى ما فوقه تجد ذلك

12

10 ستة. اضربها في نفسها يكن ستة وثلاثين فنفنى الستة وثلاثين التي فوقها فإذا أضعفتها يكن ضعفها اثني عشر

ولا تجد عددا تضعه تحت المجذورة تضربه في المضاعف يفنى ما فوقه لأن المضاعف إثني عشر

وفوقه أربعة فضع صفرا ويبقى ثلاثة وأربعون. والجذر الصحيح ستون فانسب ثلاثة وأربعين من عشرين ومائة

ضعف الجذر يكن ثلاثة أعشار وثلاثة أسداس العشر ونصف سدس العشر احمله على الجذر يكن ستين وثلاثة

أعشار وثلاثة أسداس العشر ونصف سدس العشر.

15 مثال منه آخر كم جذر أربعة وستين وخمسمائة وألفين؟

فأعظم عدد يوضع تحت آخر المجذورات يكن مربعه مساويا لما فوقه خمسة فإذا أضعفتها يكون فوقها ستة.

فاجعل تحت المجذورة التي قبل الموضوع تحتها صفر ويبقى أربعة وستون. وهو عدد أعظم من الجذر. فاحمل

عليه واحدا وعلى ضعف الجذر اثنين وانسب الأقل من الأكثر يكن عشرة أجزاء من سبعة عشر جزءا من واحد

وخمسة أسداس الجزء من سبعة عشر جزءا من واحد احمله على الخمسين يكن الجذر بتقريب. فإذا ربعته يكن

20 أربعة وستين وخمسمائة وألفين وجزئين من سبعة عشر جزءا من واحد وأربعة أجزاء من سبعة عشر جزءا في

الجزء من سبعة عشر جزءا من واحد وأربعة أجزاء من سبعة عشر جزءا في الجزء من سبعة عشر جزءا من

واحد وسدس سدس الجزء من سبعة عشر جزءا في الجزء من سبعة عشر جزءا من واحد.

(مبرهنة-2) إن أردت أقرب من ذلك فما زاد على مربع [84] // الجذر المستخرج انسبه من ضعف الجذر

واطرح تلك النسبة من الجذر المستخرج يبقى ما يكون مربعه أقرب من الأول المفروض.

25 مثاله كم جذر ثمانية وستين؟

فهو بالعمل الأول ثمانية وربع، ومربع الثمانية وربع ثمانية وستين ونصف ثمن. انسب هذا النصف ثمن من ستة

عشر ونصف تكن ثلث ثمن جزء من أحد عشر جزءا من واحد اطرحه من ثمانية وربع يبقى ثمانية وجزءان

من أحد عشر جزءا من واحد وخمسة أثمان الجزء من أحد عشر جزءا في الواحد وثلث ثمن الجزء من أحد

عشر جزءا في الجزء من أحد عشر جزءا من واحد وهذا أقرب من الأول لأن التقريب في الأول بجزء من ستة

30 عشر جزءا من واحد والتقريب الثاني بجزء واحد من ستة وتسعين وستمائة وتسعة وستين ألفا جزء في الواحد.

3 6 4 3

9- في الهامش، وكذلك كل الكسور الأخرى // 12- أربعون : مطموسة.

12

وكلما أردته أقرب تنسب هذا الجزء من ضعف الجذر وتطرحة من الجذر يبقى ما هو أقرب للمطلوب.

فيه وجه آخر :

(مبرهنة-3) وهو أن تضرب المطلوب جذره في عدد مربع بشرط أن يكون الخارج أعظم من مربع بواحد فقط

أو أقل من مربع بواحد فقط ثم تجمع الخارج إلى هذا المربع وتحفظه في طرف اللوح وسميه المعدل ثم اضرب

5 جذر المربع المضروب فيه في جذر المربع الأعظم أو الأقل واضعفه وسميه الأصل ثم اقسّم المعدل على

الأصل يخرج الجذر المقرب. والتقريب فيه بجزء واحد من مربع مسطح الأئمة.

مثاله كم جذر ثلاثة؟

فاضرب الثلاثة في ستة عشر يكن ثمانية وأربعين وهو عدد أقل من مربع بواحد. اجمع إليه المربع يكن سبعة

وتسعين هذا هو المعدل. ثم اضرب أربعة جذر الستة عشر في سبعة جذر المربع الأعظم يكن ثمانية وعشرين

10 إضعفها يكن ستة وخمسين وهو الأصل اقسّم عليه المعدل يخرج واحد وخمسة أثمان وستة أسباع الثمن فإذا

ربعته يخرج ثلاثة وسبع سبع ثمن ثمن هكذا $3 \frac{1}{7} \frac{0}{7} \frac{0}{8} \frac{0}{8}$ والتقريب فيه بجزء واحد من ستة وثلاثين ومائة

وثلاثة آلاف.

(ملاحظة) إن أردت أقرب من هذا فاضرب الثلاثة في خمسة وعشرين ومائتين يخرج خمسة وسبعون وستمائة

وهو أقل من مربع بواحد اجمعه إلى ستة وسبعين وستمائة يجتمع واحد وخمسون وثلاثمائة [85] // وألف هذا

15 هو المعدل اصطلاحاً منا. ولك أن تسميه كيف شئت. ثم اضرب الخمسة عشر ضلع المربع المضروب فيه في

ستة وعشرين ضلع المربع المجموع إلى الخارج يكن تسعين وثلاثمائة اضعفها يكن ثمانين وسبعمائة وهذا

الأصل اصطلاحاً منا أيضاً ثم اقسّم المعدل على الأصل يخرج واحد وتسعة أجزاء من ثلاثة عشر جزءاً من

واحد وخمسة أعشار الجزء من ثلاثة عشر وسدس عشر الجزء من ثلاثة عشر جزءاً من واحد وصورته هكذا

$1 \frac{1}{610} \frac{5}{13} \frac{9}{13}$. فإذا ربت هذا الجذر يخرج ثلاثة وسدس سدس عشر عشر جزء من ثلاثة عشر جزءاً في الجزء

20 من ثلاثة عشر جزءاً من واحد هكذا $3 \frac{1}{6} \frac{0}{6} \frac{0}{10} \frac{0}{10} \frac{0}{13} \frac{0}{13}$. والتقريب في هذا الجزء واحد من أربعمائة وثمانية

آلاف وستمائة ألف وهو أدق من الأول. وكلما أردت تقريباً أدق ضربته في مربع أعظم وهذا وجه حسن.

منه وجه آخر :

(مبرهنة 4) وهو أن تضرب المفروض في مربع أعظم منه وتقسم جذر الخارج المقرب على جذر المربع فما

خرج فهو الجذر المطلوب بتقريب.

25 مثاله كم جذر خمسة؟

اضربها في ستة عشر يكن ثمانين وجذرها ثمانية وثمانية أضعاف ونصف التسع. اقسّمه على أربعة جذر الستة

عشر يخرج إثنان وتسعان وثمان التسع فإذا ربت كان خمسة وثمان تسع تسع والله أعلم.

(ملاحظة) الطريق الثاني في استخراج الجذر هو أن تحل العدد المطلوب جذره إلى أعداد الأوائل ثم يتوخى

منها عدنان متساويان يكون أحدهما الجذر وإن لم يتوخى فليس له جذر البتة.

30 مثاله كم جذر خمسة وعشرين ومائتين؟

فإذا حللناها إلى أوائلها كان خمسة مرتين وثلاثة مرتين، تأخذ من كل متماثلين واحد يحصل بيدك خمسة وثلاثة

مسطحهما هو الجذر وما لم يتوخى منه متماثلان ليس بمجذور.

القسم الثاني في استخراج جذر الكسور

(مبرهنة 5) اعلم أن الكسور على اختلاف أنواعها لا تخلو عن أربع حالات :

أولها أن يكون للبسط جذر وللإمام جذر

ثانيها أن يكون للبسط جذر والإمام غير مجذور

ثالثها أن يكون البسط غير مجذور وللإمام جذر

ورابعها أن لا واحد منهما مجذورا [86] // .

أما الأول : فانسب جذر البسط من جذر الإمام يكن الجذر.

وكذلك العمل في كل كسر يكون إمامه مجذورا وهو غير مجذور ويؤخذ الجذر بتقريب وينسب من جذر الإمام.

مثاله كم جذر أربعة أتساع؟

فجذر البسط إثنان وجذر الإمام ثلاثة والنسبة الكائنة بين الإثنين البسط وبين الثلاثة الإمام هي البسط.

لو قيل كم جذر أربعة أثمان ونصف الثمن؟

فتجد جذر البسط ثلاثة وجذر الإمام أربعة فإذا نسبت يكون ثلاثة أرباع وهو الجذر.

الحالة الثانية : فالقانون العام فيها وفي غيرها أن تضرب البسط في عدد يكون مسطحة في الإمام مربعا

ثم تقسم جذر الخارج مقربا على جذر مسطح الإمام في العدد المضروب فيه.

مثاله كم جذر أربعة أتساع ونصف تسع؟

فاضرب البسط وهو تسعة في اثنين يكن ثمانية عشر وجذرها بتقريب أربعة وأربعة أجزاء من سبعة عشر جزءا

من واحد وثمان الجزء من سبعة عشر جزءا من واحد. اقسمه على جذر مسطح الإمام في الاثنين وهو ستة يكن

اثني عشر جزءا من سبعة عشر جزءا من واحد وسدس ثمن الجزء من سبعة عشر جزءا من الواحد.

الحالة الثالثة : نريد جذر أربعة أتساع وربع التسع؟

فاضرب البسط وهو سبعة عشر في أربعة يكن ثمانية وستين وجذرها بتقريب ثمانية وجزءان من أحد عشر

جزءا من الواحد وثلاث الجزء من أحد عشر جزءا من الواحد وربع الجزء من أحد عشر جزءا من الواحد وثمان

الجزء من أحد عشر جزءا من الواحد. اقسمه على الإثني عشر جذر مسطح الإمام في الأربعة يخرج سبعة

أجزاء من أحد عشر جزءا وأربعة أثمان الجزء من أحد عشر وسدسا ثمن الجزء من أحد عشر وخمسة أسداس

سدس ثمن الجزء من أحد عشر جزءا من الواحد.

إن شئت خذ أقرب جذر يكون للبسط واقسمه على جذر الإمام يكون المطلوب.

والحالة الرابعة : كم جذر أربعة أثمان وربع الثمن؟

فاضرب البسط في اثنين يكن أربعة وثلاثين خذ جذرها يكن خمسة وثمانية أعشار وسبعي العشر وسدس سبع

العشر اقسما على ثمانية يكن سبعة أعشار [87] // وثمان العشر وسبعي ثمن العشر وسدس سبع ثمن العشر

وهو الجذر.

(1) إن شئت تقسم الجذر على الجذر من غير ضرب مقربا كان أو منطقا فلك ذلك وهو جلي.

(2) وفيه قاعدة حسنة إذا كان للكسر أو للكسور جذور غير منطقة أن تضرب الكسر في مربع يكون لجذره ذلك

الجزء المسمى أو الأجزاء ثم تقسم الخارج بتقريب على جذر المربع المضروب فيه فما كان فهو الجذر بتقريب.

وكلما عظم المربع كان التقريب فيه أدق.

17- وثمان الجزء من سبعة عشر جزءا من واحد : مكررة // 27- سدس سبع العشر : مكررة // 28- سبعة : ستة // 31- وفيه :

غير واضحة/ الكسر : البسط.

مثاله كم جذر ثلاثة أعشار؟

فأقل مربع جذره عشرة مائة، فاضرب ثلاثة أعشار في مائة يكن ثلاثين وجذرها بتقريب خمسة وخمسة أجزاء من أحد عشر جزءا من واحد وربع الجزء من أحد عشر جزءا من الواحد. اقسمه على جذر المربع وهو عشرة يخرج ستة أجزاء من أحد عشر جزءا من واحد وربع عشر الجزء من أحد عشر جزءا من واحد وصورته هكذا $\frac{1}{4} \frac{0}{10} \frac{6}{11}$. التقريب فيه بجزء واحد من ستمائة وثلاثة وتسعين ألفا ومائة ألف. فإن ضعف المربع

5

المطلوب منه تلك الأجزاء. فسطح أئمة الكسور ثم ربع الخارج يكن المربع المطلوب وهو جلي..... [88] //

2- جذره عشرة : لجذره عشر // 4- وربع عشر الجزء من أحد عشر جزءا من واحد : مكررة // 5- $\frac{1}{4} \frac{0}{10} \frac{6}{11}$: $\frac{1}{1} \frac{0}{8} \frac{0}{11} \frac{0}{11} \frac{0}{10} \frac{3}{10}$

[102] // (II) الفرع الثاني في كيفية استخراج كعب العدد الأصم على التقريب كالجزر

(ملاحظة) اعلم أن كل عدد ليس له كعب حقيقي فإنه واقع بين مكعبين حقيقيين، أحدهما أعظم والآخر أصغر منه والفضل بين الكعبين واحد أبداً.

(ميرهنة 1) فإذا أردت ذلك فاضرب كعب المكعب القريب إلى عددك المفروض في ثلاثة أبداً. فإن كان هذا المكعب أقل من المفروض احمل على الخارج واحداً وإن كان أعظم اطرح منه واحداً. فما اجتمع أو بقي اتخذه إماماً ثم اقسم على الإمام فضل ما بين عددك المفروض وذلك المكعب فما خرج سمه الأصل ثم ربع كعب ذلك المكعب واضرب الخارج في ثلاثة واقسم المسطح على الإمام فما خرج خذ نصفه وسمه الفضلة. ثم ربع الفضلة واحمل على الخارج الأصل إن كان المكعب القريب أقل وإن كان أعظم اطرح الأصل واطرح الفضلة من جذر المجموع واطرح جذر الباقي من الفضلة فما بقي يحمل على كعب المكعب الأقل إن كان العمل به أو يطرح من كعب المكعب الأعظم يكن كعب العدد المفروض بتقريب.

مثاله كم كعب خمسين؟

فاضرب كعب السبعة وعشرين في ثلاثة واحمل عليه واحداً يكن عشرة وهي الإمام ثم اقسم عليه فضل ما بين عددك والكعب وهو ثلاثة وعشرون يخرج اثنان وثلاثة أعشار وهو الأصل وصورته هكذا $2\frac{3}{10}$ ثم اضرب مربع الكعب في ثلاثة يكن سبعة وعشرين اقسماً على الإمام يخرج اثنان وسبعة أعشار ونصفها واحد وثلاثة أعشار ونصف العشر وهي الفضلة وصورته هكذا $1\frac{3}{10}$ ومربعها واحد وثمانية أعشار وعشر العشر وربيع عشر العشر اجمع إليه الأصل يكن أربعة وعشراً وعشري العشر وربيع عشر العشر. خذ جذره بتقريب يكن

اثنين وثمانين عشر ونصف ثمن العشر اطرح منه الفضلة يبقى ستة أعشار وستة أثمان العشر ونصف العشر. احمله على الثلاثة ضلع المكعب القريب [103] // الأصغر يكن ثلاثة وستة أعشار وستة أثمان العشر ونصف ثمن العشر وصورته هكذا $3\frac{6}{8}\frac{6}{10}$ ومكعبه تسعة وأربعون وثمانية أعشار وتسعة أعشار العشر ستة أثمان عشر عشر العشر وسبعة أثمان ثمن ثمن عشر عشر العشر وثمان ثمن ثمن ثمن عشر عشر العشر صورته هكذا $49\frac{8}{10}\frac{9}{10}\frac{0}{8}\frac{6}{8}\frac{0}{8}\frac{7}{8}\frac{1}{8}$.

وإن شئت استخراجاً بالمكعب الأعظم فاضرب أربعة في ثلاثة يكن اثنى عشر. اطرح منها واحداً يبقى أحد عشر وهو الإمام. اقسم عليه أربعة عشر فضل ما بين العددين يخرج واحد وثلاثة أجزاء من أحد عشر وهو الأصل وصورته هكذا $1\frac{3}{11}$ ثم اضرب مربع الأربعة في ثلاثة يكن ثمانية وأربعين اقسماً على الإمام يجتمع أربعة وأربعة أجزاء من أحد عشر جزءاً من واحد ونصفها اثنان وجزآن من أحد عشر جزءاً من واحد وهو الفضلة وصورته هكذا $2\frac{2}{11}$. ثم ربع الفضلة يكن أربعة وثمانية أجزاء من أحد عشر جزءاً من واحد وأربعة أجزاء من أحد عشر جزءاً في الجزء من أحد عشر جزءاً من واحد اطرح منه الأصل يبقى ثلاثة وخمسة أجزاء من أحد عشر جزءاً من واحد وأربعة أجزاء من أحد عشر جزءاً في الجزء من أحد عشر جزءاً من واحد

9- كعب المكعب : مكعب المكعب // 12- السبعة : السابعة // 13- $2\frac{3}{10}$: $\frac{3}{10}$ ، كتبت في النص وكل الكسور الأخرى ما عدى تلك التي سنذكرها // 15- $1\frac{3}{10}$: $\frac{1}{2}\frac{3}{10}$ / عشر: عشري // 24- $1\frac{3}{11}$: في الهامش // 26- من أحد عشر جزءاً من واحد وأربعة أجزاء من أحد عشر جزءاً في الجزء من أحد عشر جزءاً من واحد اطرح منه الأصل : من أحد عشر جزءاً من واحد اطرح منه الأصل // 28- من واحد : مكررة / في الجزء من أحد عشر جزءاً : مكررة.

- وجذره واحد وتسعة أجزاء من أحد عشر جزءا من واحد وثلاثة أسباع الجزء من أحد عشر جزءا من الواحد
اطرحه من الفضلة يبقى ثلاثة أجزاء من أحد عشر جزءا من واحد وثلاثة أسباع الجزء من أحد عشر جزءا من
الواحد وخمسة أسداس سبع الجزء من أحد عشر جزءا من واحد وثلاثة أسباع الجزء من أحد عشر جزءا من
واحد وسدس سبع الجزء من أحد عشر جزءا من الواحد اطرحه من أربعة يبقى ثلاثة وسبعة أجزاء من أحد
عشر جزءا من واحد وثلاثة أسباع الجزء من أحد عشر جزءا من الواحد وخمسة أسداس سبع [104] // الجزء 5
من أحد عشر جزءا من الواحد وهو المكعب وصورته هكذا $3 \frac{5}{6} \frac{3}{7} \frac{7}{11}$. ومكعبه خمسون وعشرة أجزاء من
أحد عشر جزءا في الجزء من أحد عشر جزءا من واحد وأربعة أجزاء من أحد عشر جزءا في الجزء من أحد
عشر جزءا في الجزء من أحد عشر جزءا من واحد وأربعة أسباع الجزء من أحد عشر جزءا في الجزء من احد
عشر جزءا في الجزء من أحد عشر جزءا في الجزء من أحد عشر جزءا من واحد وأربعة أسباع الجزء من أحد
عشر في الجزء من أحد عشر جزءا في الجزء من أحد عشر جزءا من واحد وسبعا سبع سبع الجزء من أحد
عشر جزءا في الجزء من أحد عشر جزءا في الجزء من أحد عشر جزءا من أحد عشر جزءا في الجزء من
واحد وأربعة أسداس سبع سبع سبع سدس سدس سدس سدس سدس سدس سدس سدس سدس سدس سدس سدس سدس
عشر جزءا في الجزء من أحد عشر جزءا من واحد وصورته هكذا $50 \frac{1}{6} \frac{0}{6} \frac{4}{6} \frac{2}{6} \frac{0}{6} \frac{4}{6} \frac{4}{6} \frac{10}{6} \frac{0}{6}$
(مبرهنة-2) وإن أردت تدقيقه فاستخرج كعب المسألة من جهة المكعب القريب الأصغر واستخرج أيضا من
جهة المكعب القريب الأعظم واجمع هذين الكعبين ونصف المجموع هو أقرب إلى المفروض من الأول والثاني
من المسألة المتقدمة.
- إذا جمعنا الكعبين فنصف مجموعهما هو أقرب من الكعبين وهذه صورته $3 \frac{1}{2} \frac{3}{6} \frac{5}{7} \frac{1}{8} \frac{5}{10} \frac{7}{11}$ فهذا أقرب إلى
كعب الخمسين من الخارجين. لذلك فإذا كعبته يكن على هذه الصورة
هو أقرب 49 $\frac{1}{6} \frac{3}{6} \frac{2}{6} \frac{3}{6} \frac{2}{6} \frac{5}{6} \frac{0}{6} \frac{2}{6} \frac{5}{6} \frac{0}{6} \frac{0}{6} \frac{12}{6} \frac{10}{6}$ // [105] 20
(مبرهنة-3) الطريقة الثانية وهي أن تحل المفروض إلى أعداد الأوائل فإن توخى منه ثلاثة أعداد متساوية فهو
مكعب وكعبه أحدها وإن لم يتوخ فليس له كعب صحيح.
القسم الثاني في استخراج كعب الكسور
وهو أربع حالات :
- أولها أن يكون البسط والإمام معا مكعبين، كتمن. 25
ثانيا أن يكون البسط مكعبا والإمام غير مكعبين كسبعين وثلثي السبع.
ثالثا عكس الثاني، كتسعين وثلث التسع.

3- سبع الجزء من أحد عشر جزءا في الجزء من أحد عشر جزءا في الجزء من أحد عشر جزءا من واحد : سبع الجزء من أحد من
أحد عشر جزءا في الجزء من أحد عشر جزءا من واحد // 4- جزءا من واحد وسدس سبع : جزءا من واحد وثلاثة أسباع الجزء من
أحد عشر جزءا من واحد وسدس سبع // 5- جزءا من الواحد وخمسة أسداس سبع : جزءا في الواحد وخمسة أسداس سبع // 6-
المكعب : الكعب // 7- من أحد عشر جزءا في الجزء من أحد عشر جزءا : من أحد عشر جزءا من أحد عشر جزءا / في الجزء
من أحد عشر جزءا : مكررة // 9- جزءا : مكررة / أسباع : أتساع // 14- $50 \frac{1}{6} \frac{0}{6} \frac{4}{6} \frac{2}{6} \frac{0}{6} \frac{4}{6} \frac{4}{6} \frac{10}{6} \frac{0}{6}$
 $50 \frac{1}{6} \frac{0}{6} \frac{4}{6} \frac{2}{6} \frac{0}{6} \frac{5}{6} \frac{4}{6} \frac{10}{6} \frac{0}{6}$ // 26- وثلثي : وثلث // 27- وثلث : وثلثي.

رابعا لا واحدا مكعبا.

(مبرهنة-4) والقانون العام في جميعها أن تضرب البسط في عدد يكون مسطحة في الإمام مكعب وتقسم كعب خارج البسط على كعب خارج مسطح الإمام يكن الكعب. وفي الأول وجه خاص وهو أن تنسب كعب البسط من كعب الإمام. وكذلك تعمل في كل كسر لإمامه كعب حقيقي.

5

مثاله كم كعب تسعين وتلثي التسع؟

فالبسط ثمانية وكعبه إثنان والإمام سبعة وعشرون وكعبه ثلاثة فنسبة الإثنان من الثلاثة هي الكعب وهي ثلثان هكذا $\frac{2}{3}$.

ومثال الثاني ثمانية أتساع؟

فاضرب الثمانية في ثلاثة يكن أربعة وعشرين وكعبها على المقاربة إثنان وسبعة أثمان ونصف خمس الثمن، اقسامه على ثلاثة كعب مسطح الإمام في العدد الذي ضرب فيه البسط يخرج تسعة أعشار وأربعة أثمان العشر وثلاثة أخماس ثمن العشر وثلثا خمس ثمن العشر وصورته هكذا $\frac{2}{3} \frac{3}{5} \frac{4}{8} \frac{9}{10}$.

ومثال الثالث كم كعب ثلاثة أثمان وخمسة أثمان ثمن الثمن؟

استخرج كعب البسط على المقاربة كما تقدم وانسبه من كعب الإمام يكن سبعة أعشار وسبعة أثمان العشر وربع ثمن العشر وصورته هكذا $\frac{1}{4} \frac{7}{8} \frac{7}{10}$. وإن شئت فاعمل بالعمل العام.

15

ومثال الرابع كم كعب سبعة أتساع؟

فاضرب السبعة في ثلاثة يكن واحدا وعشرين استخرج كعبها كما تقدم واقسمه على كعب مسطح الإمام في الثلاثة وهو ثلاثة يكن سبعة أثمان وسدس الثمن وسدس سدس الثمن وصورته $\frac{1}{106}$ //

ANALYSE MATHÉMATIQUE

La première section sur la manière d'extraire la racine [carrée] d'un nombre irrationnel par approximation

[Proposition 1]

[Soit A le nombre dont on veut calculer la racine carrée] : $A = n^2 + r$

$$\begin{aligned} \text{Si } r \leq n \quad \text{alors } \sqrt{A} &\approx n + \frac{r}{2n} \\ \text{Si } r > n \quad \text{alors } \sqrt{A} &\approx n + \frac{\min((r+1), (2n+2))}{\max((r+1), (2n+2))} \quad 26 \end{aligned}$$

[Remarque]

Pour tout nombre A non carré il existe deux entiers n, m tel que $n^2 < A < m^2$,

$$m = n + 1 \quad \text{et} \quad \begin{cases} m^2 = n^2 + 2m - 1 \\ m^2 = n^2 + 2n + 1 \\ m^2 = n^2 + m + n \end{cases}$$

Exemples

1- $\sqrt{3643}$?

$$\begin{aligned} 3643 &= (60)^2 + 43 \\ \sqrt{3643} &\approx 60 + \frac{43}{120} = 60 + \frac{3}{10} + \frac{3}{6} \left(\frac{1}{10} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{6} \left(\frac{1}{10} \right) \right) \quad 27 \end{aligned}$$

2- $\sqrt{2564}$?

$$2564 = (50)^2 + 64, \quad \sqrt{2564} \approx 50 + \frac{64+1}{100+2} = \frac{65}{102}$$

$$\sqrt{2564} \approx 50 + \frac{10}{17} + \frac{5}{6} \left(\frac{1}{17} \right)$$

²⁶ - l'auteur a utilisé l'expression suivante : « rapport du plus petit par le plus grand » qui pourrait être exprimé

comme suit :

$$\begin{cases} \sqrt{A} \approx n + \frac{r+1}{2n+2} & \text{si } r+1 < 2n+2 \\ \text{ou bien} & \\ \sqrt{A} \approx n + \frac{2n+2}{r+1} & \text{si } r+1 > 2n+2 \end{cases} \quad \text{Or,}$$

Si $r+1 > 2n+2$ alors $r > 2n+1$ ce qui entraîne $A > (n+1)^2$. Ceci contredit l'hypothèse $n^2 < A < (n+1)^2$

²⁷ - L'auteur a d'abord appliqué l'algorithme de l'extraction de la racine carrée exacte pour retrouver le carré le plus proche. Puis, il a poursuivi le calcul de la racine approchée du nombre 3643 en appliquant la proposition 1. Il a procédé de la même manière pour les exemples suivants.

[Proposition 2]

Soit x_1 est la valeur approchée du nombre \sqrt{A} calculée en appliquant la proposition précédente.

$x_1 - \frac{(x_1)^2 - A}{2x_1}$ est une autre valeur approchée qui est plus précise que la première.

[Exemple]

[Si on applique au résultat de l'exemple précédent cette proposition] on obtient :

$$2564 - \left(50 + \frac{10}{17} + \frac{5}{6} \left(\frac{1}{17}\right)\right)^2 = \frac{2}{17} + \frac{4}{17} \left(\frac{1}{17}\right) + \frac{1}{6} \left(\frac{1}{6} \left(\frac{1}{17} \left(\frac{1}{17}\right)\right)\right).$$

$$50 + \frac{10}{17} + \frac{5}{6} \left(\frac{1}{17}\right) - \frac{\left(\frac{2}{17} + \frac{4}{17} \left(\frac{1}{17}\right) + \frac{1}{6} \left(\frac{1}{6} \left(\frac{1}{17} \left(\frac{1}{17}\right)\right)\right)\right)}{2 \left[50 + \frac{10}{17} + \frac{5}{6} \left(\frac{1}{17}\right)\right]}$$
 est une valeur plus proche du nombre

$\sqrt{2564}$.

Exemple²⁸

$\sqrt{68}$?

$\sqrt{68} \approx 8 + \frac{1}{4}$ d'après la proposition 1.

$$\sqrt{68} \approx 8 + \frac{1}{4} - \left(\frac{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{8}\right)}{16 + \frac{1}{2}}\right) = 8 + \frac{1}{4} - \left[\frac{1}{3} \left(\frac{1}{8} \left(\frac{1}{11}\right)\right) + \frac{5}{8} \left(\frac{1}{11}\right) + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{8} \left(\frac{1}{11} \left(\frac{1}{11}\right)\right)\right)\right]$$

L'erreur commise est $e' = \frac{1}{69699}$.

Nous pouvons répéter le procédé le nombre de fois qu'on veut.

[Proposition 3]

Si n^2 , m^2 sont deux nombres carrés tel que $An^2 = m^2 + 1$ ou bien $An^2 = m^2 - 1$

alors : $\sqrt{A} \approx \frac{An^2 + m^2}{2nm}$ ²⁹ et l'erreur commise est $e = \frac{1}{2^2 n^2 m^2}$ ³⁰.

Exemple

$\sqrt{3}$?

Pour les nombres carrés $n^2 = 16$ et $m^2 = 49$, on obtient :

²⁸ - L'auteur a probablement abandonné le premier exemple au profit de celui-ci pour ne pas encombrer le texte de longues expressions fractionnaires.

²⁹ - L'auteur a utilisé la terminologie suivante : *al-mu'addal* pour le numérateur de la fraction et *al-a'sl* pour le dénominateur.

³⁰ - Cette formule est issue des premières, En effet, les entiers m et n sont déterminés en tant que numérateur et dénominateur de la fraction obtenue par la formule 1.

$$\sqrt{3} \approx \frac{3 \cdot 16 + 49}{2 \cdot 4 \cdot 7} = \frac{97}{56} = 1 + \frac{5}{8} + \frac{6}{7} \left(\frac{1}{8} \right)$$

$$\text{Et } \left(\frac{97}{56} \right)^2 = 3 + \frac{1}{7} \left(\frac{1}{7} \left(\frac{1}{8} \left(\frac{1}{8} \right) \right) \right). \quad e = \frac{1}{3136}.$$

[Remarque 1]

Pour $n^2 = 225$ qui est plus grand que 16 nous obtiendrons une autre valeur plus précise :

$$\sqrt{3} \approx \frac{3 \cdot 225 + 676}{2 \cdot 15 \cdot 26} = \frac{1351}{780} = 1 + \frac{9}{13} + \frac{5}{10} \left(\frac{1}{13} \right) + \frac{1}{6} \left(\frac{1}{10} \left(\frac{1}{13} \right) \right)$$

$$\text{Avec } \left(\frac{1351}{780} \right)^2 = 3 + \frac{1}{6} \left(\frac{1}{6} \left(\frac{1}{10} \left(\frac{1}{10} \left(\frac{1}{13} \left(\frac{1}{13} \right) \right) \right) \right) \right), \quad e = \frac{1}{608400}$$

[Remarque 2]

Plus le nombre n^2 est grand plus le résultat de l'approximation est précis.

[Proposition 4]

Pour tout nombre carré b^2 , on a : $\sqrt{A} = \frac{\sqrt{A \cdot b^2}}{b}$.

Exemple

$\sqrt{5}$?

$$\sqrt{5} = \frac{\sqrt{5 \cdot 16}}{4} = \frac{\sqrt{80}}{4} \approx \frac{8 + \frac{8}{9} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{9} \right)}{4} = 2 + \frac{2}{9} + \frac{1}{8} \left(\frac{1}{9} \right).$$

$$\text{Avec } \left(2 + \frac{2}{9} + \frac{1}{8} \left(\frac{1}{9} \right) \right)^2 = 5 + \frac{1}{8} \left(\frac{1}{9} \left(\frac{1}{9} \right) \right)$$

[Remarque]

Si A est un carré parfait, on détermine sa racine à partir de sa décomposition en produit de nombres premiers.

Exemple

$\sqrt{225}$?

$$225 = 3^2 \cdot 5^2 \rightarrow \sqrt{225} = 3 \cdot 5 = 15$$

[Proposition 5]

Pour calculer la racine carrée exacte ou approchée d'un nombre fractionnaire $\frac{a}{b}$, on distingue quatre cas :

[Premier cas]

Lorsque a, b sont tout les deux des carrés parfait, soit $a=n^2$, $b=m^2$ alors :

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \frac{n}{m}$$

Exemple

$$\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3} \quad \text{et} \quad \sqrt{\frac{4}{8} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{8}\right)} = \frac{3}{4}$$

[Remarque]

Si a n'est pas un carré parfait, on pose $\sqrt{a} \approx a'$ et on a :

$$\frac{a}{b} \approx \frac{a'}{m}$$

[Deuxième cas]³¹

Soit le nombre c choisis tel que $(c.b)$ soit un carré. Posons $c.b = m'^2$ et on a :

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a.c}}{m'} \approx \frac{c'}{m'} \quad \text{où} \quad c' \approx \sqrt{a.c}$$

Exemple

$$\sqrt{\frac{4}{9} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{9}\right)} ?$$

$$\sqrt{\frac{4}{9} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{9}\right)} = \sqrt{\frac{9}{18}} = \frac{\sqrt{9.2}}{6} = \frac{\sqrt{18}}{6} \approx \frac{4 + \frac{4}{9}\left(\frac{1}{17}\right) + \frac{1}{8}\left(\frac{1}{17}\right)}{6} = \frac{12}{17} + \frac{1}{8}\left(\frac{1}{17}\right)$$

[Troisième cas]

$$\sqrt{\frac{4}{9} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{9}\right)} ?$$

$$\sqrt{\frac{4}{9} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{9}\right)} = \sqrt{\frac{17}{4.9}} = \frac{\sqrt{17.4}}{12} = \frac{\sqrt{68}}{12} \approx \frac{8 + \frac{2}{11}}{12} \left[= \frac{2}{3} + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{11}\right) \right]$$

[Quatrième cas]

$$\sqrt{\frac{4}{8} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{8}\right)} = \sqrt{\frac{17}{4.8}} = \frac{\sqrt{17.2}}{8} = \frac{\sqrt{34}}{8} \approx \frac{5 + \frac{8}{10} + \frac{2}{7}\left(\frac{1}{10}\right) - \left(\frac{1}{6}\left(\frac{1}{7}\left(\frac{1}{10}\right)\right) + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{7}\left(\frac{1}{10}\right)\right)\right)}{8}$$

$$\sqrt{\frac{4}{8} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{8}\right)} \approx \frac{6}{10} + \frac{2}{8}\left(\frac{1}{10}\right) + \frac{2}{7}\left(\frac{1}{8}\left(\frac{1}{10}\right)\right) + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{7}\left(\frac{1}{8}\left(\frac{1}{10}\right)\right)\right)$$

³¹ - L'auteur a, à partir du cas précédent, énoncé la règle générale qui permet de calculer la racine carrée des fractions dont le numérateur ou le dénominateur ne sont pas des carrés parfaits. Ce cas ainsi que les deux restants ont été traités à travers des exemples.

[Remarque]

Nous pouvons également effectuer la division de a par b puis prendre la racine carrée du quotient.

Ou bien utiliser la formule suivante $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{ak^2b}}{kb} \approx \frac{u}{kb}$ avec $\sqrt{ak^2b} \approx u$.

Exemple

$$\sqrt{\frac{3}{10}} ?$$

$$\sqrt{\frac{3}{10}} = \frac{\sqrt{3 \cdot 100}}{10} = \frac{\sqrt{30}}{10} \approx \frac{5 + \frac{5}{11} + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{11} \right)}{10} = \frac{6}{11} + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{10} \left(\frac{1}{11} \right) \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{10} \left(\frac{1}{11} \left(\frac{1}{11} \left(\frac{1}{10} \left(\frac{1}{10} \right) \right) \right) \right) \right) \right)$$

Avec une erreur $e = \frac{1}{1693000}$

Si $(k.b)$ est trop petit, on choisit alors le carré du produit du dénominateur de la fraction.

[Exemple de cela, $\sqrt{\frac{5}{6.3.2}} = \frac{1}{6.3.2} \sqrt{\frac{5.(6.3.2)^2}{6.3.2}}$.

La deuxième section sur la manière d'extraire la racine cubique d'un nombre [qui n'est pas un cube parfait] par approximation

[Remarque]

Pour tout nombre non cube A il existe deux entiers n, m tel que $n^3 < A < m^3$ et $m - n = 1$.

[Proposition 1]

Soient A un nombre non cube et n un entier tel que $n^3 < A < (n+1)^3$

$$\sqrt[3]{A} \approx n + \left[\sqrt{\left(\frac{1}{2} \left(\frac{3n^2}{3n+1} \right)^2 \right) + \frac{A-n^3}{3n+1}} - \frac{1}{2} \left(\frac{3n^2}{3n+1} \right) \right]$$

Ou bien

$$\sqrt[3]{A} \approx (n+1) - \left[\frac{1}{2} \left(\frac{3(n+1)^2}{3(n+1)-1} \right) - \sqrt{\left(\frac{1}{2} \left(\frac{3(n+1)^2}{3(n+1)-1} \right)^2 \right) + \frac{(n+1)^3 - A}{3(n+1)-1}} \right]$$

$(3n+1)$ et $3(n+1)-1$ sont appelés les dénominateurs³².

$\frac{A-n^3}{3n+1}$ et $\frac{(n+1)^3 - A}{3(n+1)-1}$ sont appelés les racines.

$\frac{3n^2}{3n+1}$ et $\frac{3(n+1)^2}{3(n+1)-1}$ sont appelés l'excès.

Exemples

$\sqrt[3]{50}$?

On a $27 < 50 < 64$

Le dénominateur est $3 \cdot 3 + 1 = 10$

La racine est $\frac{50-27}{10} = \frac{23}{10} = 2 + \frac{3}{10}$

L'excès est $\frac{1}{2} \left(\frac{3 \cdot 3^2}{3 \cdot 3 + 1} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{27}{10} \right) = \frac{1}{2} \left(2 + \frac{7}{10} \right) = 1 + \frac{3}{10} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{10} \right)$

$\left[1 + \frac{3}{10} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{10} \right) \right]^2 = 1 + \frac{8}{10} + \frac{1}{10} \left(\frac{1}{10} \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{10} \left(\frac{1}{10} \right) \right)$

³² - La terminologie utilisée est la suivante : *al-imām* pour le dénominateur, *al-aṣl* pour la racine et *al-faḍla* pour l'excès.

$$\left[1 + \frac{3}{10} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{10}\right)\right]^2 + 2 + \frac{3}{10} = 4 + \frac{2}{10} + \frac{2}{10}\left(\frac{1}{10}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{10}\left(\frac{1}{10}\right)\right)$$

Ainsi, $\sqrt{4 + \frac{2}{10} + \frac{2}{10}\left(\frac{1}{10}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{10}\left(\frac{1}{10}\right)\right)} \approx 2 + \frac{2}{8}\left(\frac{1}{10}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{8}\left(\frac{1}{10}\right)\right)$
 $\left[2 + \frac{2}{8}\left(\frac{1}{10}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{8}\left(\frac{1}{10}\right)\right)\right] - \left[1 + \frac{3}{10} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{10}\right)\right] = \frac{6}{10} + \frac{6}{8}\left(\frac{1}{10}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{8}\left(\frac{1}{10}\right)\right)$

D'où $\sqrt[3]{50} \approx 3 + \frac{6}{10} + \frac{6}{8}\left(\frac{1}{10}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{8}\left(\frac{1}{10}\right)\right)$

Avec :

$$\left[3 + \frac{6}{10} + \frac{6}{8}\left(\frac{1}{10}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{8}\left(\frac{1}{10}\right)\right)\right]^3 = 49 + \frac{8}{10} + \frac{9}{10}\left(\frac{1}{10}\right) + \frac{6}{8}\left(\frac{1}{10}\left(\frac{1}{10}\right)\right) + \frac{7}{8}\left(\frac{1}{8}\left(\frac{1}{10}\left(\frac{1}{10}\right)\right)\right) + \frac{1}{8}\left(\frac{1}{8}\left(\frac{1}{8}\left(\frac{1}{10}\left(\frac{1}{10}\right)\right)\right)\right)$$

Du côté du grand cube, nous avons :

$$\sqrt[3]{64} = 4$$

Le dénominateur est $3.4 - 1 = 10$

La racine est $\frac{64 - 50}{11} = \frac{14}{11} = 1 + \frac{3}{11}$

L'excès est $\frac{1}{2}\left(\frac{3.4^2}{3.4 - 1}\right) = 2 + \frac{2}{11}$.

$$\left(2 + \frac{2}{11}\right)^2 = 4 + \frac{8}{11} + \frac{4}{11}\left(\frac{1}{11}\right) \quad \text{et} \quad \left[4 + \frac{8}{11} + \frac{4}{11}\left(\frac{1}{11}\right)\right] - \left(1 + \frac{3}{11}\right) = 3 + \frac{5}{11}\left(\frac{4}{11}\left(\frac{1}{11}\right)\right)$$

$$\sqrt{3 + \frac{5}{11}\left(\frac{4}{11}\left(\frac{1}{11}\right)\right)} \approx 1 + \frac{9}{11} + \frac{3}{7}\left(\frac{1}{11}\right)$$

Et $2 + \frac{2}{11} - \left(1 + \frac{9}{11} + \frac{3}{7}\left(\frac{1}{11}\right)\right) = \frac{3}{11} + \frac{3}{7}\left(\frac{1}{11}\right) + \frac{5}{6}\left(\frac{1}{7}\left(\frac{1}{11}\right)\right) + \frac{3}{7}\left(\frac{1}{11}\right) + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{7}\left(\frac{1}{11}\right)\right)$

D'où $\sqrt[3]{50} \approx 4 - \left(\frac{3}{11} + \frac{3}{7}\left(\frac{1}{11}\right) + \frac{5}{6}\left(\frac{1}{7}\left(\frac{1}{11}\right)\right) + \frac{3}{7}\left(\frac{1}{11}\right) + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{7}\left(\frac{1}{11}\right)\right)\right)$
 $\sqrt[3]{50} \approx 3 + \frac{7}{11} + \frac{3}{7}\left(\frac{1}{11}\right) + \frac{5}{6}\left(\frac{1}{7}\left(\frac{1}{11}\right)\right)$

Avec :

$$\left[3 + \frac{7}{11} + \frac{3}{7}\left(\frac{1}{11}\right) + \frac{5}{6}\left(\frac{1}{7}\left(\frac{1}{11}\right)\right)\right]^3 = 50 + \frac{10}{11}\left(\frac{1}{11}\right) + \frac{4}{11}\left(\frac{1}{11}\left(\frac{1}{11}\right)\right) + \frac{4}{9}\left(\frac{1}{11}\left(\frac{1}{11}\left(\frac{1}{11}\right)\right)\right) + \frac{4}{7}\left(\frac{1}{11}\left(\frac{1}{11}\left(\frac{1}{11}\right)\right)\right) + \frac{2}{7}\left(\frac{1}{7}\left(\frac{1}{11}\left(\frac{1}{11}\left(\frac{1}{11}\right)\right)\right)\right) + \frac{4}{7}\left(\frac{1}{7}\left(\frac{1}{7}\left(\frac{1}{11}\left(\frac{1}{11}\left(\frac{1}{11}\right)\right)\right)\right)\right) + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{6}\left(\frac{1}{7}\left(\frac{1}{7}\left(\frac{1}{11}\left(\frac{1}{11}\left(\frac{1}{11}\right)\right)\right)\right)\right)\right)$$

[Proposition 2]

Soient x_1, x_2 deux valeurs approchées du nombre irrationnel $\sqrt[3]{A}$ obtenues respectivement par la formule 1 et la formule 2 de la proposition 1. La moyenne arithmétique $x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2}$ est une autre valeur plus proche du nombre irrationnel $\sqrt[3]{A}$.

Exemple

D'après l'exemple précédent nous avons :

$$\sqrt[3]{50} \approx 3 + \frac{6}{10} + \frac{6}{8} \left(\frac{1}{10} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{8} \left(\frac{1}{10} \right) \right) \text{ d'après la formule 1.}$$

$$\sqrt[3]{50} \approx 3 + \frac{7}{11} + \frac{3}{7} \left(\frac{1}{11} \right) + \frac{5}{6} \left(\frac{1}{7} \left(\frac{1}{11} \right) \right) \text{ d'après la formule 2.}$$

$$x_3 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) = 3 + \frac{7}{11} + \frac{4}{10} \left(\frac{1}{11} \right) + \frac{1}{8} \left(\frac{1}{10} \left(\frac{1}{11} \right) \right) + \frac{4}{7} \left(\frac{1}{8} \left(\frac{1}{10} \left(\frac{1}{11} \right) \right) \right) + \frac{3}{6} \left(\frac{1}{7} \left(\frac{1}{8} \left(\frac{1}{10} \left(\frac{1}{11} \right) \right) \right) \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{6} \left(\frac{1}{7} \left(\frac{1}{8} \left(\frac{1}{10} \left(\frac{1}{11} \right) \right) \right) \right) \right) \right)$$

Avec :

$$(x_3)^3 = 49 + \frac{10}{11} \left(\frac{12}{11} \left(\frac{1}{11} \right) \right) + \frac{5}{8} \left(\frac{1}{8} \left(\frac{1}{11} \left(\frac{1}{11} \right) \right) \right) + \frac{2}{8} \left(\frac{1}{8} \left(\frac{1}{(11)^3} \right) \right) + \frac{5}{8} \left(\frac{1}{8^4 \cdot (11)^3} \right) + \frac{2}{7} \left(\frac{1}{8^5 \cdot (11)^3} \right) +$$

$$\frac{3}{7} \left(\frac{1}{7} \left(\frac{1}{8^5 \cdot (11)^3} \right) \right) + \frac{2}{7} \left(\frac{1}{7^2 \cdot 8^5 \cdot (11)^3} \right) + \frac{3}{6} \left(\frac{1}{7^3 \cdot 8^5 \cdot (11)^3} \right) + \frac{1}{6} \left(\frac{1}{6^2 \cdot 7^3 \cdot 8^5 \cdot (11)^3} \right)$$

[Proposition 3]

Pour tout nombre qui se décompose en produit de nombres premiers comme suit $A = (k_1)^{3n_1} (k_2)^{3n_2} \dots (k_p)^{3n_p}$ on a $\sqrt[3]{A} = (k_1)^{n_1} \dots (k_p)^{n_p}$.

Tout nombre qui n'admet pas la décomposition citée ci-dessus sa racine cubique est un nombre irrationnel.

Deuxième partie sur le calcul de la racine cubique d'une fraction**[Proposition 4]**

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \sqrt[3]{\frac{ak}{bk}} = \frac{\sqrt[3]{ak}}{\sqrt[3]{bk}}$$

k est choisi de telle sorte que (bk) soit un cube parfait.

On distingue quatre cas :

[Premier cas]

Si a et b sont des cubes parfaits alors $\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$

Exemples

$$\sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$$

$$\sqrt[3]{\frac{2+2\left(\frac{1}{9}\right)}{9}} = \sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{2}{3}.$$

[Deuxième cas]

Lorsque a est un cube parfait et b n'est pas un cube.

Exemples de cela :

$$\sqrt[3]{\frac{8}{9}} = \sqrt[3]{\frac{8.3}{27}} = \sqrt[3]{\frac{24}{27}} \frac{\sqrt[3]{24}}{3} \approx \frac{2 + \frac{7}{8} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}\left(\frac{1}{8}\right)\right)\right)}{3}$$

$$\sqrt[3]{\frac{8}{9}} \approx \frac{9}{10} + \frac{4}{8}\left(\frac{1}{10}\right) + \frac{3}{5}\left(\frac{1}{8}\left(\frac{1}{10}\right)\right) + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{5}\left(\frac{1}{8}\left(\frac{1}{10}\right)\right)\right)$$

[Troisième cas]

Lorsque a n'est pas un cube parfait et b est un cube parfait.

Exemple de cela :

$$\sqrt[3]{\frac{3}{8} + \frac{5}{8}\left(\frac{1}{8}\left(\frac{1}{8}\right)\right)} = \sqrt[3]{\frac{29}{8^2}} = \frac{\sqrt[3]{248}}{8} \approx \frac{7}{10} + \frac{7}{8}\left(\frac{1}{10}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{8}\left(\frac{1}{10}\right)\right);$$

[Quatrième cas]

Lorsque ni a ni b ne sont des cubes parfaits.

Exemple de cela :

$$\sqrt[3]{\frac{7}{9}} = \sqrt[3]{\frac{7.3}{27}} = \sqrt[3]{\frac{21}{27}} = \frac{\sqrt[3]{21}}{3}$$

$$\sqrt[3]{\frac{7}{9}} \approx \frac{7}{8} + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{8}\right) + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{6}\left(\frac{1}{8}\right)\right)$$

III- 1. 8. Edition et analyse mathématique d'une section de
Ghunyat dhawī l-albāb d'al-Qalaṣādī
Ms. Alger, B.N, n°3313
ff. 12b-13b

[12] // الباب الثاني في أخذ جذر العدد غير المجذور بالتقريب :

(مبرهنة-1) والعمل في ذلك على ما تقدم من عد العدد بجذر لا جذر إلى آخره وخذ جذره، ثم تلك البقية إن كانت مثل الجذر أو أقل منه فسمها من ضعف الجذر الصحيح واحمل الخارج على الجذر يكون المطلوب. ومثال من ذلك : إذا قيل لك جذر ستة وخمسين ومائة.

5 فانزل ذلك هكذا $\overset{\cdot}{6}$ $\overset{\cdot}{5}$ $\overset{\cdot}{1}$ ثم خذ جذرها على ما تقدم يكن إثني عشر ويبقى لك إثني عشر سمها من ضعف

الجذر يكن نصفًا احمله على الجذر الصحيح فيكون جذر المسألة إثني عشر ونصفًا هكذا $\frac{1}{2} \cdot 12$. وإذا ربت هذا الخارج، أعني ضرب البسط في مثله وقسمت الخارج على أربعة، خرج لك العدد المطلوب جذره وربع، وهو ما وقع به التقريب. وهكذا مهما يكن النصف في الجذر يقع التقريب بربع.

ومثال مما إذا كان الباقي أقل من الجذر: إذا قيل لك جذر أربعة وخمسون ومائة.

10 فانزل ذلك هكذا $\overset{\cdot}{4}$ $\overset{\cdot}{5}$ $\overset{\cdot}{1}$ ثم افعل على ما تقدم فيخرج لك الجذر الصحيح إثني عشر ويبقى عشرة سمها من

ضعف الجذر وهو أربعة وعشرين يكن سدسين ونصف سدس، احمله على الجذر الصحيح يكن إثنا عشر وسدسين ونصف سدس وهو جذر المسألة هكذا $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{6} \cdot 12$.

ويقع التقريب بسدس وربع سدس أسداس على هذه الصورة [13] و // $\frac{1}{4} \frac{0}{6} \frac{1}{6} 154$.

(مبرهنة-2) وأما إن كان الباقي أكثر من الجذر فزد على الباقي واحد وزد على ضعف الجذر إثنين وسم الأقل من الأكثر وما كان احمله على الجذر الصحيح يكن المطلوب.

ومثال من ذلك : إذا قيل لك جذر خمسة وتسعين.

فانزل ذلك هكذا $\overset{\cdot}{5}$ $\overset{\cdot}{9}$ ثم خذ جذرها الصحيح يكن تسعة والباقي أربعة عشر وهي أكثر من التسعة.

فزد عليها واحد يكن خمسة عشر وزد على ضعف الجذر اثنين تكن عشرين. سم منها الخمسة عشر تكن ثلاثة أرباع، احملها على تسعة يكن جذر المسألة تسعة وثلاثة أرباع هكذا $\frac{3}{4} \cdot 9$.

20 وإذا أردت بكم وقع التقريب فابسط هذا الجذر يكن تسعة وثلاثين، اضربها في مثلها يخرج لك أحد وعشرون وخمسمائة وألف هكذا 1521 اقسم هذا الخارج على الأئمة أعني الأربعة ومثلها يخرج لك العدد المطلوب جذره وما وقع به التقريب : وذلك ربع الربع هكذا $\frac{1}{4} \frac{0}{4}$.

الباب الثالث في تدقيق التقريب

(مبرهنة-3) والعمل فيه أن تسمي الجزء الذي وقع به التقريب من ضعف الجذر وما خرج تطرحه من الجذر ما بقي فهو الجذر المدقق.

ومثال من ذلك : إذا قيل لك جذر ستة.

فقد علمت مما تقدم أن جذرها إثنان ونصف والتقريب بربع. فسم ربعًا من ضعف الجذر وهو خمسة يخرج لك ربع الخمس هكذا $\frac{1}{4} \frac{1}{5}$ اطرح هذا الخارج من جذر المسألة وهو إثنان ونصف على قاعدة طرح الكسور يبق

لك إثنان وخمسان وربع الخمس هكذا $\frac{1}{4} \frac{2}{5} \cdot 2$ وهو جذر الستة. وإذا ربت هذا خرج لك العدد المطلوب وما

13 - $\frac{1}{4} \frac{0}{6} \frac{1}{6} 154$: $\frac{1}{4} \frac{0}{6} \frac{1}{6} 54$ // -16 من ذلك : مكررة // -17 خذ جذرها : مطموسة // -26 ومثال من ذلك : إذا قيل لك

جذر : في الهامش // -27 وهو خمسة : في الهامش

وقع به التقريب وذلك ربع ربع وخمس الخمس هكذا $\frac{1000}{4455}6$.

وأعني بالتربيع أن تبسط الجذر يكن تسعة وأربعين اضربها في مثلها يخرج لك واحد وأربعمئة وألفان هكذا 2401. اقسام هذا الخارج على الأئمة أعني أئمة المضروب وأئمة المضروب فيه وهو خمسة مرتين وأربعة مرتين يكن المطلوب.

5 الباب الرابع في تجذير الكسور

(ميرهنة-4) فإن كان للبسط جذر منطق وكذلك للإمام فانسب جذر البسط من جذر الإمام.

مثال من ذلك : جذر أربعة أتساع وكذلك أربعة أثمان ونصف الثمن.

فانزل ذلك هكذا $\frac{1}{2}\frac{4}{8}$ ثم خذ جذر البسط وهو ثلاثة وسمها من جذر الإمام وهو أربعة تكن ثلاثة أرباع وهو جذر المسألة هكذا $\frac{3}{4}$.

10 وإن قيل لك جذر إثنين وربع فانزل ذلك هكذا $\frac{1}{4}2$ ثم اقسام جذر البسط وهو ثلاثة على جذر الإمام وهو إثنان يخرج لك واحد ونصف وهو جذر المسألة هكذا $\frac{1}{2}1$.

(ميرهنة-5) وأما إن كان بخلاف هذا فاضرب البسط في الإمام وخذ جذر الخارج بتقريب واقسمه 20 على الإمام وما كان فهو جذر المسألة بتقريب.

ومثال من ذلك: كم جذر أربعة أسداس ونصف سدس.

15 فانزل ذلك هكذا $\frac{1}{2}\frac{4}{6}$ ثم اضرب البسط وهو تسعة في الأئمة يخرج لك ثمانية ومائة. خذ جذر هذا الخارج

[13 ظ] // بتقريب يكن عشرة وخمسين اقسامه على مسطح الأئمة وهو إثنى عشر يخرج لك خمسة أسداس وخمس سدس وهو جذر المسألة بتقريب.

وإذا بسطت هذا الخارج خرج لك ستة وعشرون اضربها في مثلها يخرج لك ستة وسبعون وستمئة هكذا 676.

اقسم هذا الخارج على الأئمة، ولا بد ان تقدم في الترتيب أئمة مثل الذي كان في المسألة، وذلك بأن تحل ستة إلى

20 ثلاثة وإثنين فتضع الإثنين بعد الستة والخمستين بعدهما والثلاثة بعد ذلك وتقسم هذا العدد على الثلاثة أولاً

والخارج على خمسة الخ فيخرج لك الأربعة أسداس ونصف سدس وما وقع به التقريب وذلك ثلث خمس خمس

نصف السدس $\frac{10010}{35526}$.

3- المضروب وأئمة : في الهامش // 7- مثال من ذلك : محذوفة في النص // 19- كان في المسألة : كان أو المسألة.

ANALYSE MATHÉMATIQUE

Deuxième chapitre sur [le calcul de] la racine carrée d'un nombre, qui n'admet pas de racine [exacte], par approximation

[Proposition 1]

[Soit A le nombre dont on veut calculer la racine carrée] : $A = n^2 + r$.

$$\text{Si } r \leq n \text{ alors } \sqrt{A} \approx n + \frac{r}{2n}$$

Exemple [1]

$$\sqrt{156} = ?$$

$$156 = (12)^2 + 12, \quad \sqrt{156} \approx 12 + \frac{12}{2 \cdot 12} = 12 + \frac{1}{2} \text{ et on a :}$$

$$\left(12 + \frac{1}{2}\right)^2 = 156 + \frac{1}{4}, \quad \left(\frac{1}{4}\right) \text{ représente l'erreur commise.}$$

Exemple [2]

$$\sqrt{154} = ?$$

$$154 = (12)^2 + 10, \quad \sqrt{154} \approx 12 + \frac{10}{2 \cdot 12} = 12 + \frac{2}{6} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{6}\right) \text{ et on a :}$$

$$\left(12 + \frac{2}{6} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{6}\right)\right)^2 = 154 + \frac{1}{6} + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{6}\right).$$

[Proposition 2]

[Soit A le nombre dont on veut calculer la racine carrée : $A = n^2 + r$]

$$\text{Si } r > n \text{ alors } \sqrt{A} \approx n + \frac{\min((r+1), (2n+2))}{\max((r+1), (2n+2))}$$

Exemple

$$\sqrt{95} = ?$$

$$95 = 9^2 + 14 \text{ avec } 14 > 9.$$

$$\sqrt{95} \approx 9 + \frac{14+1}{2 \cdot 9+1} = 9 + \frac{15}{20} = 9 + \frac{3}{4} \text{ et } \left(9 + \frac{3}{4}\right)^2 = \left(\frac{39}{4}\right)^2 = \frac{1521}{4 \cdot 4} = 95 + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4}\right).$$

Troisième chapitre sur l'affinement de l'approximation

[Proposition 3]

[Soit x_1 la valeur attribuée au nombre irrationnel \sqrt{A} obtenue par l'application de l'une des deux propositions précédentes suivant les cas]. Le nombre $[x_2]$ obtenu par la formule suivante :

$$x_2 = x_1 - \frac{x_1^2 - A}{2x_1} \text{ est une deuxième valeur approchée du nombre } \sqrt{A} \text{ qui vérifie } x_2 < x_1.$$

Exemple

$$\sqrt{6} = ?$$

$$\sqrt{6} \approx [x_1] = 2 + \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \left(2 + \frac{1}{2}\right) - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2 \cdot \left(2 + \frac{1}{2}\right)} = 2 + \frac{1}{2} - \frac{\frac{1}{4}}{5} = 2 + \frac{2}{5} + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{5}\right)$$

$$\sqrt{6} \approx 2 + \frac{2}{5} + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{5}\right) \quad \text{et} \quad \left(2 + \frac{2}{5} + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{5}\right)\right)^2 = 6 + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{5} \left(\frac{1}{5}\right)\right).$$

$$\text{En effet, } \left(2 + \frac{2}{5} + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{5}\right)\right)^2 = \left(\frac{49}{5.4}\right)^2 = \frac{2401}{5.5.4.4}.$$

Quatrième chapitre sur [le calcul de] la racine carrée [d'un nombre] fractionnaire

[Proposition 4]

[Soient] a et b deux nombres [carrés], on a alors :

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

Exemples

$$1- \sqrt{\frac{4}{9}} \left[= \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3} \right]$$

$$2- \sqrt{\frac{4}{8} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{8}\right)} \left[= \sqrt{\frac{9}{2.8}} \right] = \frac{3}{4}$$

$$3- \sqrt{2 + \frac{1}{4}} \left[= \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}} \right] = \frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2}$$

[Proposition 5]

Si a et b ne sont pas des carrés parfaits alors :

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a.b}}{b}$$

Exemple

$$\sqrt{\frac{4}{6} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{6}\right)} = ?$$

$$\sqrt{\frac{4}{6} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{6}\right)} \left[= \sqrt{\frac{9}{2.6}} \right] = \frac{\sqrt{9.2.6}}{12} = \frac{\sqrt{108}}{12}.$$

$$[\text{Selon la proposition 1}], \text{ nous avons } \sqrt{108} \approx 10 + \frac{2}{5} \quad \text{et} \quad \frac{10 + \frac{2}{5}}{12} = \frac{5}{6} + \frac{1}{5} \left(\frac{1}{6}\right).$$

$$[\text{Par conséquent,}] \sqrt{\frac{4}{6} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{6}\right)} \approx \frac{5}{6} + \frac{1}{5} \left(\frac{1}{6}\right).$$

$$\text{Avec } \left(\left(\frac{5}{6}\right) + \frac{1}{5} \left(\frac{1}{6}\right)\right)^2 = \frac{26^2}{6.5.6.5} \left[= \frac{4}{6} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{6}\right) + \frac{1}{3.5.5.2.6} \right].$$

**III- 1. 9. Edition et analyse mathématique d'une section du
Sharḥ al-Qalaṣādī de Muḥammad Ibn Yūsuf aṭ-Ṭfayyesh
Ms. Ghārdāya, Algérie, bibliothèque privée,
Banī Yazguen, sans numéro,
pp. 219-231, 460-461**

[219] //الباب الثاني في أخذ جذر العدد غير المجذور بالتقريب :

والعمل فيه على ما تقدم من عد العدد بجذر لا جذر إلى آخره. (ميرهنة-1) وخذ جذره فتبقى بقية. ثم تلك البقية إن كانت مثل الجذر الصحيح أو أقل منه فسمها من ضعف الجذر الصحيح وإن كانت أكثر فزد فيها واحدا وفي ضعف الجذر إثنين وسم الأقل من الأكثر واحمل الخارج على الجذر الصحيح يكن المطلوب وهو الجذر بالتقريب. فالباقي ثلاثة : أحدها أن يكون مثل الجذر الصحيح والثاني أن يكون أقل وحكمهما أن تسمي الباقي من ضعف الجذر الصحيح.

والثالث أن يكون أكثر من الجذر الصحيح فحكمه أن تزيد عليه واحدا وتزيد على ضعف الجذر اثنين وتسمي الأقل من الأكثر وتحمل الخارج على الجذر الصحيح وذلك هو أن تسمي حاصل الباقي من حاصل الضعف. والعدد غير المجذور إما مركب وإما غير مركب وكلاهما يؤخذ جذره بتقريب كما ذكر المصنف العمل وهو

عمل [220] // منظور فيه إلى أقرب المجذورات إليه قبله تنظر الفضل بين الجذور والمطلوب جذره بتقريب فتسمي ذلك الفضل من ضعف الجذر الصحيح إن كان مثله أو أقل وإلا فزد عليه واحدا وعلى ضعف الجذر اثنين وسم الفضل من الجذر المضاعف وزيادته وزد الخارج على الجذر الصحيح.

وبرهان ذلك أن كل عدد يراد جذره وهو غير مجذور فإنه واقع بين مربعين متواليين أحدهما أصغر منه والثاني أكبر منه.

وكل مربعين متواليين فبين جذريهما واحد أبدا.

وفضل ما بين المربعين مثل جذري أصغرهما وواحد وهو أيضا مثل جذري أكبرهما إلا واحدا وهو أيضا مثل مجموع الجذرين، وذلك ظاهر من ضرب جذر الأكبر في مثله بعد قسمته إلى جذر الأصغر وواحد.

مثال ذلك تسعة وستة عشر فإنهما مربعان متواليان وبينهما سبعة. والسبعة هي مثل ضعف جذر التسعة وواحد وهي أيضا مثل ضعف جذر الستة عشر إلا واحد وهي أيضا مثل مجموع الثلاثة والأربعة وذلك ظاهر من ضرب الأربعة في مثلها بعد تفصيلها إلى ثلاثة وواحد. ف ضرب الأربعة في مثلها هو مثل ضرب الثلاثة في مثلها والواحد في مثله وضعف أحدهما في الثاني وذلك ثلاثة في ثلاثة بتسعة وواحد في واحد بواحد وستة في واحد بستة والمجموع ستة عشر وضعف الثلاثة في واحد بضعف الثلاثة أبدا وضرب الثلاثة في الثلاثة بتسعة وهو المربع الأصغر والواحد في مثله بواحد أبدا. فمربع الأكبر يزيد على مربع الأصغر بضعف جذر الأصغر وواحد، فيكون فضل ما بينهما مثل ضعف جذر الأصغر وواحد وهو مثل ضعف جذر الأكبر إلا واحدا.

واختبار صحة تجذير التقريب أن تربيع الجواب الخارج فيساوي خارج التربيع العدد المطلوب جذره ويزيد عليه بكسر هو قدر التقريب.

ومثال من ذلك إذا قيل لك كم جذر ستة وخمسين ومائة؟

فانزل ذلك هكذا 6 5 1 ثم خذ جذرها على ما تقدم بان تضع واحدا تحت واحد وتضربه في نفسه وتقني به الواحد. وتضعفه باثنين تضعها تحت الخمسة وتثبت الواحد تحتها وتضع تحت الستة اثنين تضربهما في الاثنين تحت الخمسة يبق واحد من الخمسة وتضرب الاثنين في نفسها بأربعة تطرحها من الستة عشر فتبقى اثنا عشر والخارج أسفل اثنا عشر وهي الجذر الصحيح كما قال يكن : أي الجذر الصحيح، اثني عشر ويبقى لك اثنا عشر البقية مثل الجذر فسمها من ضعف الجذر الصحيح وهو اثنا عشر وضعفه أربعة وعشرون يكن نصفًا فإن الإثني عشر الباقية نصف الأربعة والعشرين أحمله أي أحمل النصف على الجذر الصحيح بمعنى أنك تقول كذا ونصف

2-جذره فتبقى : جذره فتبقى، الجملة مطموسة//5-ثلاثة : أحدهما : بينهما كلمة غير مفهومة//25- واختبار...هو قدر التقريب : في الهامش//31-الصحيح : في الهامش.

وليس يقول إنك تحمل الإثني عشر على الجذر. فيكون جذر المسألة اثني عشر ونصفا هكذا $\frac{1}{2} \cdot 12$. وإذا ربت هذا الخارج : أعني ضربت البسط في مثله فإن بسط اثني عشر ونصف خمسة وعشرون تضرب الإثني عشر في اثنين مقام النصف وتحمل الواحد البسط. فإذا ضربت خمسة وعشرين في خمسة وعشرين خرج لك خمسة وعشرون وستمائة. وإذا قسمته على الأربعة خرج لك ستة وخمسون ومائة، وهو العدد المطلوب جذره، وبقي واحد تضعه على الأربعة فيكون ربعا كما قال. وقسمت الخارج على الأربعة خرج لك العدد المطلوب جذره وربع زائد. وهكذا متى يكن النصف في الجذر يقع التقريب بربع. وإن قيل كم جذر ثلاثين؟

•
30 فضع خمسة تحت الصفر واضربها في مثلها بخمسة وعشرين تبقى خمسة وهي مثل الجذر فسمها من ضعف الخمسة تكن نصفًا. احملة على الخمسة يكن جذر الثلاثين خمسة ونصفًا وإذا ربتته خرج لك ثلاثون وما وقع به التقريب وذلك ربع.
10 وإن قيل لك كم جذر اثنين وثلاثين [221] // وثلاثمائة وألف؟

• •
هكذا 1 3 3 2 فضع ثلاثة تحت الثلاثة الثانية واضربها في نفسها ببق لك أربعة على رأس الثلاثة. واضعف الثلاثة بستة وضعها تحت الثلاثة الأولى وضع تحت الاثنين ستة واضربها في الستة وفي نفسها تبقى ستة وثلاثون سمها من ضعف الجذر يكن نصفًا فجذر المسألة ستة وثلاثون ونصف.
15 وإن قيل كم جذر سبعة وثلاثين وستمائة؟

فضع اثنين تحت الستة واضربها في نفسها ببق اثنين. ضاعفها بأربعة وأثبتها تحت الثلاثة وضع تحت السبعة خمسة واضربها في الأربعة وفي نفسها فالخارج خمسة وعشرون والباقي اثنا عشر وهو أقل فسمها من ضعف الخمسة وعشرون وهي خمسون يخرج عشرا وخمسا عشر فالجذر خمسة وعشرون وعشرا وخمسا عشر.
20 وإن قيل كم جذر خمسة؟

فهو اثنان صحيحة والباقي واحد وهو أقل منهما. فسمه من ضعف الاثنين يكن ربعا فجذر الخمسة الذي بتقريب اثنان وربع والتقريب بربع ربع وذلك أن أقرب مجذور إلى الخمسة قبلها هو أربعة والفضل واحد وجذر الأربعة اثنان أضغفه يصير أربعة سم الواحد الزائد من الأربعة يكن ربعا فالجذر اثنان وربع.
ومثال من ذلك إذا قيل لك كم جذر خمسة عشر ألفا وستمائة وخمسين؟

فالجذر الصحيح مائة وخمسة وعشرون والباقي أقل منه وهو خمسة وعشرون سمه من ضعف المائة والخمسة العشرين تكن عشرا فالجذر مائة وخمسة وعشرون وعشر.
25 ومثال من ذلك إذا قيل لك كم جذر أربعة وخمسون ومائة؟

• •
فانزل ذلك هكذا 1 5 4 ثم افعل على ما تقدم يخرج لك الجذر الصحيح اثني عشر ويبقى عشرة وذلك أنك تضع الواحد تحت الواحد وتضربه في نفسه فيفنى به الواحد. ويضاعف باثنين وتثبتها تحت الخمسة وتضع الاثنين تحت الأربعة تضربها في اثنين بأربعة فيبقى واحد من خمسة هي عشرة. وتضربها في نفسها بأربعة

30 تقنى ما فوقها. سمها أي العشرة من ضعف الجذر وضعفه هو أربعة وعشرون تكن سدسين ونصف سدس احملة على الجذر الصحيح يكن اثني عشر وسدسين ونصف سدس وهو جذر المسألة هكذا $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{6} \cdot 12$.

4- وهو العدد المطلوب جذره : في الهامش // 20- صحيحة : في الهامش // 21- ربع ربع : ربع // 29- بأربعة تقنى ما : بأربعة ما.

فابسط الاثني عشر والسدسين ونصف السدس بضرب الاثني عشر في الستة وحمل الاثني عشر وضرب الحاصل في الاثني وحمل الواحد واقسم على الأئمة وهي الأربعة لوجود النصف في الجذر والستة وإنما كان الستة من الأئمة مرتين لمكان التضعيف والأربعة لضرب الاثني عشر والستة وما فوقها في الأربعة والستة مرتين فاضرب الاثني عشر في الستة ولكن لما حصل اثنان واثنان بالضرب جمعا أربعة ولو قسمنا على الاثني ثم

5 على الاثني لاتفق المعنى. ولم تجمع الستة لأنه يجتمع ما يخرج من عشرة وعدل المصنف بقوله سدسين الخ عن ربع وسدس للموافقة بين البسط وهو عشرة مثلها والمقام وهو أربعة وعشرون بالأنصاف فيرجع البسط إلى خمسة والمقام إلى الاثني عشر ونسبة الخمسة إليها سدسان ونصف سدس ويقع التقريب سدس وربع سدس السدس على هذه الصورة $154 \frac{1}{4} \frac{0}{6} \frac{1}{6}$.

وإن قيل كم جذر ثمانية وعشرين؟

10 فجزرها الصحيح خمسة والباقي ثلاثة سهمها من ضعف الجذر تكن ثلاثة أعشار اعملها على الخمسة يكن الجذر خمسة وثلاثة أعشار والتقريب بتسعة أعشار العشر. وتبين لك أن تربيع بسط الجذر وهو ثلاثة وخمسون [222] //يخرج لك تسعة وثمانمائة وألفان اقسمه على الأئمة عشرة وعشرة.

وإن قيل كم جذر أربعين؟

فهو ستة وثلاث والتقريب بتسع.

15 وإن قيل كم جذر أربعين وألف؟

• •
1 0 4 0 فضع ثلاثة تحت الصفر الثاني واضربها في نفسها بيق واحد وضعها بستة وضع الستة تحت الأربعة وضع اثنين تحت الصفر الأول واضربها في الستة وفي نفسها بيق ستة عشر سهمها من ضعف الجذر يكن ربعا اعمله على الجذر الصحيح يكن اثنين وثلاثين وربعا والتقريب بنصف الثمن. والله أعلم.

وإذا كان الباقي أكثر من الجذر الصحيح فزد عليه أي على الباقي واحدا وعلى ضعف الجذر اثنين وسم الأقل

20 من الأكثر وما كان فاحمله على الجذر الصحيح يكن المطلوب.

ومثال من ذلك إذا قيل لك كم جذر خمسة وتسعين؟

•
فانزل هكذا 9 5 ثم خذ جزرها الصحيح يكن تسعة والباقي أربعة عشر: لأنك تضع نقطة على الخمسة وتضع تحت الخمسة تسعة وتضربها في نفسها بأحد وثمانين وتسقط ذلك من خمسة وتسعين فتبقى أربعة عشر وهي أكثر من التسعة فزد عليها واحدا تكن خمسة عشر وزد على ضعف الجذر اثنين تكن عشرين. سم منها الخمسة

25 عشر تكن ثلاثة أرباع اعملها على التسعة يكن جذر المسألة: تسعة وثلاثة أرباع هكذا $9 \frac{3}{4}$.

وإذا أردت بكم يقع التقريب فابسط هذا الجذر يكن تسعة وثلاثين بأن تضرب التسعة في الأربعة بستة وثلاثين وتحمل الثلاثة اضربها في مثلها يخرج لك أحد وعشرون وخمسمائة وألف هكذا 1521 اقسم هذا الخارج على الأئمة أعني الأربعة في مثلها يخرج لك العدد المطلوب جزره وما تقع به التقريب وذلك ربع الربع هكذا

$95 \frac{1}{4} \frac{0}{4}$. وإن قلت من أين له أربعة ومثلها قلت إحداهما ملفوظ بها في الجذر والآخر تولدت من اشتماله على

1- فإذا ضربت الاثني عشر فيما بعدها وقسمت الخارج بعد ضربه في مثله على أربعة حصل لك في آخر العمل يبقى واحد أول سطر المقسوم وهو ربع يجعل الأربعة فينزل صفر في مقابلة الواحد إلى السطر الخارج أسفل بالقسمة وهو ثلاث خمسات : جملة زائدة في النص // 2- الستة : في الهامش // 6- مثلها : في الهامش // 11- تبين : غير واضحة // 18- ثلاثين : غير واضحة // 23- خمسة : ستة // 24- خمسة : ستة.

نصف فإن ثلاثة أرباع نصف وربع.

وإن قيل كم جذر اثنين وعشرين؟

فجذرها الصحيح أربعة والباقي ستة. زد عليها واحدا تكن سبعة سمها من ضعف الجذر والمزيد فيه وهو اثنان

تكن سبعة أعشار احملها على الأربعة يكن الجذر أربعة وسبعة أعشار هكذا $4\frac{7}{10}$. وإذا ربعت بسط هذا

الخارج وهو سبعة وأربعون عادت الاثنان والعشرون وما وقع به التقريب وذلك تسعة أعشار العشر هكذا 5

$$22\frac{0}{10}\frac{9}{10}$$

وإن قيل كم جذر ثلاثة وأربعين؟

فخذ جذرها الصحيح وهو ستة والباقي سبعة. زد عليها واحد تكن ثمانية، سمها من ضعف الجذر المزيد فيه

ثتان تكن أربعة أسباع احملها على الستة يكن المطلوب ستة وأربعة أسباع. وإذا ربعت بسط هذا الخارج وهو

ستة وأربعون خرج لك ستة عشر ومائة وألفان اقسمه على الأئمة يخرج لك ثلاثة وأربعون وما وقع به التقريب 10 وهو سبع وسبعا السبع.

وإن قيل كم جذر خمسة وتسعين؟

فخذ جذرها الصحيح تسعة والباقي أربعة عشر زد عليها واحد تكن خمسة عشر سمها من عشرين ضعف الجذر

المزيد فيه اثنان تكن ثلاثة أرباع احملها على الستة يكن الجذر تسعة وثلاثة أرباع. فربع بسط هذا الخارج وهو

سعة وثلاثون يخرج لك أحد وعشرون وخمسمائة ألف اقسمه على الأئمة يخرج لك خمسة وتسعون وما وقع به 15 التقريب وذلك نصف الثمن هكذا $\frac{1}{2}\frac{1}{8}$.

وإن قيل كم جذر اثنين وثلاثين وأربعمائة وخمسة آلاف؟

فالجذر الصحيح ثلاثة وسبعون وتبقى لك ثلاثة ومائة. زد عليها واحد تكن أربعة ومائة. فسمها من ضعف الجذر

المزيد فيه اثنان وذلك ثمانية وأربعون ومائة وهي مركبة من أربعة وسبعة وثلاثة [223] // يخرج لك ستة

وعشرون جزءا من سبعة وثلاثين هكذا $73\frac{26}{31}$ وبسط هذا سبعة وعشرون وسبعمائة وألفان. ومربعه تسعة 20

وعشرون وخمسمائة وستة وثلاثون ألفا وأربعمائة ألف وسبعة آلاف ألف. اقسمه على الأئمة يخرج العدد المطلوب

جذره وما به التقريب وذلك ثلاثة أجزاء من سبعة وثلاثين وعشرة أجزاء من سبعة وثلاثين في الجزء من سبعة

وثلاثين هكذا $\frac{10}{37}\frac{3}{37}$.

وإن قيل كم جذر خمسة عشر ألفا وثمانمائة ؟

فالجذر مائة وخمسة وعشرون والباقي مائة وخمسة وسبعون. زد عليه واحدا يجتمع مائة وستة وسبعون وزد في 25

المائتين والخمسين التي هي ضعف الجذر الصحيح اثنين يجتمع مائتان واثنان وخمسون. وسم المجتمع الأول من

المجتمع الثاني يكن الجواب ثلثين وسبعي تسع المرادف لستة أضعاف وسبعي تسع لأن ثلثي المائتين والخمسين مائة

وثمانية وستون وسبعي تسعها ثمانية وذلك مائة وستة وسبعون. فزد الثلثين وسبعي تسع من المائة والخمسة

$$-6\frac{9}{10}\frac{0}{10}22 : \text{في الهامش} // -21 \text{ سبعة : تسعة} // -22 \text{ ثلاثين : محذوفة} // -23 : \frac{1}{37}\frac{0}{37}\frac{0}{37}\frac{2}{37} : \frac{10}{37}\frac{3}{37}$$

والعشرين وهي الجذر الصحيح يكن المجتمع هو الجذر الصحيح المطلوب تقريبا.

وإن قيل كم جذر خمسة وخمسين وستمائة؟

فجذره الصحيح خمسة وعشرون والباقي ثلاثون زد عليه واحدا يكن أحدا وثلاثين وزد في الجذر بعد تضعيفه اثنين يخرج اثنان وخمسون سم منها الأحد والثلاثين يكن سبعة أجزاء من ثلاثة عشر وثلاثة أرباع الجزء من

ثلاثة عشر. وإذا ضرب هذا في مثله خرج العدد المطلوب جذره والتقريب.

5

ولنا طريق آخر في أخذ الجذر بتقريب وهو أحسن من الطريق الذي ذكر المصنف لأن ما ذكره لا يقع فيه التدقيق إلا بعد آخر الجذر وهذا يقع فيه التدقيق في نفس آخر الجذر فهو طريق احتوى وجهين أخذ الجذر بالتقريب وتدقيق التقريب: (مبرهنة-2) وهو أن تضرب العدد المطلوب جذره بتقريب في عدد له جذر وهو أعظم من العدد المطلوب الجذر وتأخذ جذر المجتمع بتقريب ويقسم هذا الجذر على جذر المربع المضروب فما

خرج فهو المطلوب.

10

ومثال من ذلك إذا قيل لك كم جذر اثنين بتقريب دقيق؟

فاضرب الاثنين في أربعة، لأنها مربعه وأعظم منه تخرج ثمانية خذ جذرها اثنين وتبقى أربعة وهي أكثر من الجذر فزد في الجذر المضاعف اثنين وفي الباقي واحدا وسم خمسة من ستة واحملها على الجذر الصحيح يكن جذر ثمانية اثنين وخمسة أسداس $\frac{5}{6}2$ اقسما على جذر المربع المضروب فيه بأن تضع المقسوم والمقسوم

عليه هكذا $\frac{5}{6}2$ على 2 : واضرب بسط كل قسم في أئمة الآخر فيكون خارج المقسوم سبعة عشر وخارج

15

المقسوم عليه اثني عشر فاقسم يخرج في القسمة واحد وسدسان ونصف سدس $1\frac{2}{6}$ ومربع هذا الجذر أقرب إلى الاثنين من غيره وهو بعينه الخارج بعد تدقيق التقريب بالطريق الأول والتقريب فيه بربع سدس السدس.

وإن قيل كم جذر خمسة؟

فتنظر اقرب المجذورات إليها بعدها وهو تسعة فتضربها فيها بخمسة وأربعين وجذرها بتقريب ستة وخمسة

20

سباع فتقسمها على ثلاثة جذر التسعة يخرج اثنان وسبع وثلاثي سبع $2\frac{1}{3}7$. وهو جذر خمسة بتقريب فاضربه

في مثله تخرج خمسة وتلث سبع السبع وتلث ثلث سبع السبع وهذا الزائد به التقريب.

ولنا طريق آخر (مبرهنة-3) هو أن تنتظر اقرب المجذورات بعد العدد المطلوب الجذر لا قبله وتنتظر الفضل بينهما فإن كان مثل الجذر أو أقل فسمه من ضعف الجذر واسقط تلك [224] // النسبة من الجذر الصحيح

فالباقي هو العدد المطلوب جذره بتقريب.

25

فالمثل كائني عشر أقرب مجذور إليها ستة عشر والفضل أربعة وهو جذر الأعلى فتسميها من ضعف الجذر فيخرج نصف فتتقصه من الجذر فيبقى ثلاثة ونصف وهو جذر اثني عشر بتقريب. فاضربه في مثله تخرج اثنا عشر وربيع وهذا الزائد به التقريب.

5- خرج العدد المطلوب جذره والتقريب : الجذر بتقريب // 14- المضروب : المزيد // 21- اثنان وسبع وثلاثي سبع $2\frac{1}{3}$: تسعان

ونصف التسع // $22\frac{1}{2}$ خمسة وتلث سبع السبع وتلث ثلث سبع السبع : خمسة وتسع وخمسة أتساع التسع وربيع تسع التسع.

ومثال الأقل : ثمانية أقرب مجذور إليها تسعة والفضل واحد سمه من ضعف الجذر يكن سدسا $\frac{1}{6}$ اسقطه من جذر التسعة يبق اثنان وخمسة أسداس $\frac{5}{6}$ 2 وهو جذر ثمانية. فاضربه في مثله يخرج ثمانية وسدس السدس $\frac{1}{6}$ 8 وهذا الزائد به التقريب.

5 (مبرهنة-4) وإن كان الفضل أكثر من الجذر: فانقص واحدا من الفضل واثنين من ضعف الجذر وسم الباقي من الفضل من الباقي من ضعف الجذر ثم اسقط تلك النسبة من الجذر، فالباقي هو جذر العدد المطلوب جذره بتقريب. وذلك كعشرة أقرب مجذور إليها ستة عشر والفضل ستة. اسقط واحدا تبق خمسة. فتسقط من ضعف الجذر اثنين فيبقى ستة فتسمي الخمسة من الستة يخرج خمسة أسداس فتسقطها من الجذر فيبقى ثلاثة وسدس وهو جذر عشرة فاضربه في مثله تخرج عشرة وسدس السدس وهذا الزائد به التقريب.

10 ولنا طريق آخر (مبرهنة-5) أن تأخذ أقرب عدد مربع وخذ جذره وأحفظه. فإن كان العدد المربع أقل من العدد المفروض فأنقصه من العدد المفروض وسم الباقي من ضعف الجذر المحفوظ واحمله على الجذر يكن الجذر بتقريب.

مثال ذلك خمسة؟

15 فأقرب مربع إليها أربعة وجذرها اثنان فأحفظها. واسقط الأربعة من الخمسة الباقي واحد سمه من ضعف الجذر المحفوظ وذلك اثنان وضعفها أربعة والتسمية ربع. فاحمل خارج التسمية على الجذر يخرج اثنان وربع وذلك جذر الخمسة بتقريب. فإذا ضربت الاثنين وربعاً في مثلاً تخرج خمسة ونصف ثم فوقع التقريب بنصف ثمن.

(مبرهنة-6) وإن كان العدد المربع أكثر من العدد المفروض فخذ جذره أيضاً وأحفظه ثم اسقط العدد المفروض من المربع والباقي سمه من ضعف جذر المربع المحفوظ وانقص خارج التسمية من الجذر يكن الجذر بتقريب. وذلك كجذر خمسة عشر؟

20 فأقرب عدد مربع إليها ستة عشر وجذرها أربعة فأحفظها. ثم اسقط الخمسة عشر من الستة عشر الباقي واحد. فسمه من ضعف الجذر المحفوظ يكن ذلك ثمناً فأسقطه من الجذر يكن الباقي ثلاثة وسبعة أثمان وهي جذر الخمسة عشر بتقريب. فإذا ضربتها في نفسها تخرج خمسة عشر وثمان الثمن وبه وقع التقريب والله أعلم.

فصل

25 وعلة أخذ الجذر بالتقريب من جانب المربع الذي قبله أن جذر العدد مقسوم بقسمين جذر الأصغر وكسر. وضرب ذلك في مثله كضرب كل واحد في نفسه وأحدهما في ضعف الثاني. فتكون الفضلة بين العدد والمربع الأصغر مثل مربع الكسر وضرب الكسر في ضعف جذر الأصغر. فتسومح بإسقاط مربع الكسر وتجعل الفضلة مثل ضرب الكسر في ضعف جذر الأصغر. فقسم الفضلة على ضعف جذر الأصغر يخرج منه الكسر بتقريب. وظاهر بين أن هذا الكسر الخارج أعظم من الكسر الحقيقي فلا يكون التقريب أبداً إلا زائداً على العدد المطلوب جذره.

30 وعلة أخذ الجذر بتقريب من جانب المربع الذي يلي ما أريد جذره مما بعده ويقال له المربع الأكبر، أن جذر المربع الأكبر مقسوم بجذر العدد وكسر وضربه في مثله كضرب كل قسم منهما في مثله وأحدهما في ضعف الثاني فتكون الفضلة مثل مربع الكسر وضرب الكسر في ضعف جذر العدد. فتسومح بزيادة مربع الكسر.

24- وعلة أخذ : أخذ / بالتقريب من جانب المربع الذي قبله أن : بالتقريب أن.

فيكون المجتمع مثل ضرب الكسر في ضعف جذر المربع الأكبر كما عرفت في نوع من أنواع الضرب بالتثقيب إذ يجعل أحد المضروبين [225] // الكسر والمضروب الثاني جذر الأكبر. فالفضلة مثل ضرب الكسر في ضعف جذر المربع فيخرج الكسر بتقريب وهو أصغر من الكسر الحقيقي. فإذا طرح من جذر المربع الأكبر بقى جذر العدد بتقريب زائدا أبدا.

5 وعة زيادة اثنين في ضعف الجذر وواحد في الفضلة: أن الفضل بين الكسر وجذر المربع الأكبر يساوي مجموع جذر المربع الأصغر مع فضل الواحد على الكسر والفضل بين الفضل وضعف الجذر هو مثل الفضل بين العدد المطلوب الجذر والمربع الأصغر وزيادة واحد لأن بين المربعين ضعف جذر أكبرهما إلا واحدا وهو بين. لأن الفضل بين المربع الأكبر والمربع الأصغر خمسة وهي مثل ستة إلا واحد. وفضل المربع الأكبر على الأصغر يساوي مجموع الفضلين فضل الأكبر على العدد المطلوب جذره وفضل العدد المطلوب جذره على المربع الأصغر فإذا طرحت الفضل بين المربع الأكبر والعدد المطلوب جذره من ضعف جذر المربع الأصغر إلا واحدا بقي فضل ما بين المربعين الأصغر والعدد المطلوب جذره. فلذلك زيد على ضعف جذر المربع الأصغر اثنان وعلى الفضل واحد إن كان أكثر من الجذر فزيد على ضعفه الاثنين: اثنان لكي يلحق بضعف جذر التسعة وزيد على الأربعة واحد ليلحق بالخمسة المسماة من الستة الباقية ويلزم من ذلك أنه إذا كان فضلة المربع الأكبر أعظم من جذره نقص منها واحد ومن ضعف جذر الأكبر اثنان وحينئذ تسمى وتنقسم التسمية من جذر الأكبر.

15 مثاله أن تأخذ جذر عشرة من قبل المربع الأكبر.

فالفضلة ستة أكبر من أربعة جذر المربع وتضعف الأربعة بثمانية وتنقص منها اثنين فتبقى ستة وانقص من الفضلة واحدا فيبقى خمسة فتسميها من الستة بخمسة أسداس فتحطها من أربعة فيبقى لك ثلاثة وسدس وهو جذر العشرة بتقريب.

20 (مبرهنة-7) وإن الفضلة متى كانت مثل الجذر فالفضلة الأخرى مثل الجذر الآخر والعدد وسط بين المربعين وهو وسط في النسبة : نسبة الأصغر إليه كنسبته إلى الأكبر. فالإثنا عشر مثلا بين التسعة والستة عشر في النسبة لأن التسعة من الإثني عشر ثلاثة أرباعها والإثني عشر من الستة عشر ثلاثة أرباعها فالإثنا عشر وسط في النسبة فإذا أخذت جذرها من قبل التسعة كان فضلها على التسعة مثل جذر التسعة فيكون جذرها ثلاثة ونصفا. وإذا أخذت جذرها من قبل الستة عشر كان فضلها على الإثني عشر مثل جذر الستة عشر فيكون جذرها أيضا ثلاثة ونصفا فلك أخذ جذر العدد المتوسط بوجه سهل وهو أن تأخذ جذر أحد المربعين الأصغر أو الأكبر وتريد على جذر الأصغر نصفا وتنقص على جذر الأكبر نصفا فيكون الجذر بتقريب.

(ملاحظة) واعلم أن أخذ الجذر بالتقريب على طريق الضرب في المربع ينفع في أخذ جذور الدرج والدقائق فإنها تصرف إلى الثواني وإلى الروابع ويؤخذ جذرها لأن الثواني أجزاء من ستين في جزء من ستين من الدرجة. فصرف الدرج إلى الثواني يحصل من ضربها في مربع ستين والدرجة جزء من ثلاثمائة وستين جزءا

30 من منطقة فلك البروج. وكل جزء منها مقسوم بستين دقيقة وكل دقيقة مقسومة بستين ثانية وكل ثانية مقسومة بستين ثلاثة وكل ثلاثة مقسومة بستين رابعة كذلك إلى غاية ما قدر على قسمته في رصد الكواكب واستخراج أوارها. وليست هذه الدرج بحقيقة في الفلك وإنما هي قسمة وهمية مفروضة في الوهم ليس لها في الدائرة الفلكية تشخص حسي ولا عقلي لأنها متصلة الأجزاء.

1- المربع الاكبر : المربع / بالتثقيب : بلا تثقيب // 14- حينئذ : في الهامش // 26- نصفا وتنقص على جذر الأكبر نصفا فيكون : نصفا فيكون // 28- الثواني : الثاني، وهكذا فيما بعد / الروابع : الرابع / ستين في : ستين من // 31- ثلاثة : رابعة.

وبذلك تؤخذ جذر الكسور تضرب في مربع إمامها فيخرج ضرب البسط في الإمام فينقسم الجذر على الإمام. لكن إذا ضربته في مربع أعظم منه فلا بد أن تأخذ جذر الخارج بما مر لا بهذا وإلا دار ولم ينتج. **وعلة ذلك العمل [226] //** أن ضرب عدد في عدد وأخذ جذر الخارج كضرب جذر أحدهما في جذر الآخر. فإذا أردت ضرب جذر أربعة مثلا فإنك تضربها في تسعة وتأخذ جذر الخارج بستة فهذه الستة مثل الخارج من ضرب جذر الأربعة المطلوب في جذر التسعة فإذا قسمتها على جذر التسعة خرج جذر الأربعة لأنه إذا قسم خارج الضرب على أحد المضروبين خرج المضروب الآخر. ولو كان المضروب جذر التسعة وضربها في مربع أصغر منها كانت الأربعة مثلا وأخذت جذر الخارج الذي هو ستة وقسمته على جذر الأربعة يخرج لك جذر التسعة المطلوب. لذلك كان لذلك العمل وجهان: أن تضرب العدد المطلوب الجذر في مربع أكبر منه أو في مربع أصغر والتدقيق يقع في أحدهما أكثر.

كجذر ستة. إذا ضربت الستة في الأربعة فإنه يخرج أكثر تدقيقا من الخارج إذا ضربت في التسعة. والله أعلم. **الباب الثالث في تدقيق التقريب** لفظ التقريب في الاصطلاح موضوع للزيادة التي خرجت في الضرب أعني ضرب الجذر في مثله وتلك الزيادة لا تكون إلا كسرا ثم إن هذا الكسر قد يكون بعيدا عن الخارج في المربع الذي هو العدد المطلوب جذره بتقريب. وقد علمت أن الكسور تتفاضل بالأكبرية والأصغرية وتدقيق التقريب رد كسر التجدير إلى كسر أدق. وفيه فائدة أخرى وهي أن يتبين به ما نقص لو لم يكن بتقريب.

(مبرهنة-8) والعمل فيه أن تسمى الجزء الذي وقع به التقريب من ضعف الجذر الخارج بعد تمام العمل لا الجذر الصحيح وحده وما خرج بالتسمية تطرحه من الجذر المذكور الخارج بعد تمام العمل. وما بقي فهو الجذر المدقق. إذا ضربته في نفسه فإن الخارج حينئذ يكون أدق. **ومثال من ذلك إذا قيل لك دقق جذر ستة.**

قد علمت مما تقدم في الباب الذي قبل هذا أن جذرها اثنان ونصف لأنك تضع اثنين تحتها وتضربها في نفسها فتخرج أربعة تسقطها من الستة فيبقى اثنان. فالاثنتان المضروبان هي الجذر الصحيح والاثنتان الباقيان مثل هذا الجذر الصحيح فتسبهما من ضعف الجذر الصحيح وضعفه أربعة فيكونان نصفاً للأربعة فتقول جذر الستة اثنان والنصف بتقريب وإن التقريب بربع، إذ قال: متى يكن النصف في الجذر يقع التقريب بربع فسم ربعاً من ضعف الجذر وهو خمسة لأن الاثنتين إلى الاثنتين أربعة والنصف إلى النصف واحد يخرج لك ربع خمس هكذا $\frac{1}{4 \ 5}$

تسمى الواحد البسط المفرد الذي على الأربعة من بسط الصحيح وهو الخمسة والإمام وهو الأربعة وبسطهما عشرون والواحد هو ربع الأربعة والأربعة خمسة العشرين فهو ربع الخمس بأن تحل العشرين إلى أئمتها فتضع الخمسة والأربعة التين هما إمامان لها هكذا 4 5 فتقسم الواحد على الأربعة بأن تضعه عليها لأنه أقل منها اخرج هذا الخارج من جذر المسألة وهو اثنان ونصف على هذه الصورة والكسور بأن تنزل ذلك هكذا $\frac{1}{4 \ 5}$

من $\frac{1}{2}$ فتضرب الربع وهو بسط مفرد وهو واحد في الاثنتين الإمام المسمى منه باثنتين أحفظها وتبسط الاثنتين الصحيحين والنصف بأن تضرب الاثنتين الصحيحين في الاثنتين الإمام بأربعة وتحمل الواحد الكسر الذي على

الاثنين بخمسة. اضربها وهي بسط المسمى منه في أئمة المسمى وهي أربعة وخمسة بمائة اطرح منها المحفوظ وهو اثنان تبقى ثمانية وتسعون. اقسما على الأئمة ورتبها هكذا إن شئت 5 4 2 خمسة وأربعة واثنين اقسما على الاثنين تنقسم وهو تسعة وأربعون على الأربعة تخرج اثنا عشر [227] // وبيق واحد ضعه على الأربعة واقسم الاثنين عشر على الخمسة بيق اثنان ضعها على الخمسة ويخرج اثنان صحيحان كما قال بيق لك

5 اثنان وخمسان وربع الخمس هكذا $2 \frac{1}{4} \frac{2}{5}$ وهو جذر الستة بالتدقيق بعد تجذيرها بالتقريب. وإذا ربت هذا

الخارج خرج لك العدد المطلوب جذره وما وقع به التقريب وذلك ستة وربع ربع خمس الخمس هكذا $6 \frac{1}{4} \frac{0}{4} \frac{0}{5} \frac{0}{5}$. وأعني بالتربيع أن تبسط الجذر المدقق يكن تسعة وأربعين وذلك أن تنزله هكذا $2 \frac{1}{2} \frac{2}{4} \frac{2}{5}$

كما أنزله المصنف أنفا لكن لا تضرب شيئا في الاثنين الأخيرة لأنها لا كسر عليها وإن شئت فلا تنزلها واضرب الاثنين الأوليين الصحيحين في الخمسة الإمام بعشرة وتحمل الاثنين فوقها باثني عشر

10 وتضربها في الأربعة بثمانية وأربعين وتحمل عليها الواحد فوق الأربعة بتسعة وأربعين فضربتها في مثلها خرج لك واحد وأربعمائة وألفان هكذا 2401 اقسم هذا الخارج على الأئمة أعني أئمة المضروب وأئمة

المضروب فيه واترك الستة المكتوبة أولا وهي صحيحة هكذا $\frac{1}{4} \frac{0}{4} \frac{0}{5} \frac{0}{5}$ ولا تكررهما بل اكتب أئمة سطر

واحدا كما قال وهي خمسة مرتين وأربعة مرتين يكن المطلوب هكذا $6 \frac{1}{4} \frac{0}{4} \frac{0}{5} \frac{0}{5}$ وهو الجذر المدقق لأنك إذا

ضربت الجذر في نفسه خرج المجذور وقسمت هنا على الأئمة لأن من تمام ضرب الكسور القسمة على الأئمة وذلك أن تضع الأربعة تحت أربعمائة وتضرب فيها ستة بأربعة وعشرين فيبقى ما على رأسها ويبقى واحد

15 ضعه على الأربعة كسرا والستة المضروبة صحيحة فالخارج ستة وربع ربع خمس خمس. وإن ركبت الخمسة مع الأربعة والخمسة وقسمت خرج لك الستة ومابه التقريب وذلك ربع عشر العشر هكذا $\frac{1}{4} \frac{0}{10} \frac{0}{10}$.

وإذا ضرب الستة في مربع أعظم وهو تسعة بأربعة وخمسين وجذرها سبعة وسبعان ونصف سبع فاقسم ذلك على جذر التسعة وهو ثلاثة يخرج اثنان وثلاثة أسباع وسدس سبع وهو جذر المسألة وإذا ربتة خرج عشرة

20 آلاف وستمائة وتسعة فاقسمه على مكرر الأضلاع هكذا 6677 تخرج ستة وما وقع به التقريب وهو ثلثا سبع سبع وسدس سدس سبع سبع.

وإذا أردت تدقيق جذر العشرة فقد علمت جذرها ثلاثة وسدسا. وقد التقريب سدس سدس. وإن أردت تدقيقه فاضرب عشرة في ستة عشر وخذ جذرها مائة وستين وذلك اثنا عشر وسبعة عشر جزءا من ستة وعشرين

25 جزءا. فاقسم ذلك على جذر الستة عشر وهو أربعة يخرج ثلاثة وأربعة أجزاء من ستة وعشرين جزءا وربع جزء من ستة وعشرين جزءا. وإذا ربت هذا الخارج حصل أحد وأربعون ومئتان وثمانية آلاف ومائة ألف واقسم

ذلك على ثمانية مرتين وثلاثة عشر مرتين يخرج عشرة وما وقع به التقريب وذلك أربعة أجزاء من ثلاثة عشر جزءا من جزء من ثلاثة عشر وثلاثة أثمان وثمان جزء من ثلاثة عشر جزءا.

1- الاثنين : اثنان / اطرح ... وتسعون: في الهامش//7- المدقق : في الهامش//8- لانها لا كسر : لأنها آخر لا كسر//9- الامام بعشرة : الامام بعدها بعشرة//16- وإن ركبت الخمسة مع الأربعة والخمسة وقسمت خرج لك الستة ومابه التقريب وذلك ربع عشر العشر هكذا

$\frac{1}{4} \frac{0}{10} \frac{0}{10}$: في الهامش//18- وإذا : غير واضحة//21- سدس سدس : سدس//24- من ستة وعشرين جزءا : محذوفة//25-

من ستة وعشرين جزءا : محذوفة/ ومئتان : وأربعمائة //27- من ثلاثة عشر جزءا : محذوفة

وإن قيل دقق جذر خمسة فقد علمت أن جذرها بتقريب اثنان وربع $\frac{1}{4}2$ والخارج من ضرب هذا الجذر في نفسه خمسة وربع الربع $\frac{1}{4}5$. نسمي ربع الربع من ضعف الجذر وهو أربعة ونصف $\frac{1}{2}4$ يكن الخارج ثمن التسع هكذا $\frac{1}{8}9$ اسقطه من الجذر الذي هو اثنان وربع يكن الباقي اثنين وتسعين وثمان التسع $\frac{1}{8}2$ وهذا هو الجذر الذي إذا ضرب في نفسه يكون الخارج من ضربه أقرب إلى الخمسة من الخارج الأول الذي هو

$$5 \quad \text{الخمسة وربع الربع والخارج هنا من ضربه في نفسه خمسة وثمان ثمن تسع التسع} \frac{1}{8899} \text{ وهذا لا شك أنه}$$

أدق من ربع الربع بكثير.

وهكذا لو أردت تدقيق التدقيق إلى ما لا نهاية له.

وإن قيل دقق جذر خمسة فجذرها اثنان وربع والتقريب بنصف الثمن سمها من ضعف الجذر وهو أربعة وربعان يخرج لك ثمن التسع $\frac{1}{8}9$ اطرحه من جذر الخمسة وهو اثنان وربع يبق لك اثنان وتسعان [228] وثمان

10 التسع $\frac{1}{8}2$ و هو الجذر. وإذا ربعت بسطه وهو أحد وستون ومائة خرج لك أحد وعشرون وتسعمائة وخمسة

$$\text{وعشرون ألفا اقسما على الأئمة يخرج لك الخمسة وما به التقريب وذلك ثمن ثمن تسع التسع} \frac{1000}{8899}5$$

وإن قيل دقق جذر ثمانية عشر. فجذرها أربعة وربع والتقريب بنصف الثمن قسمها من ضعف الجذر وهو ثمانية ونصف يخرج ثمن الجزء من سبعة عشر اطرحها من الجذر وهو الأربعة والربع فتبقى لك أربعة وأربعة أجزاء

15 من سبعة عشر وثمان الجزء من سبعة عشر هكذا $\frac{1}{8}4$ وهو الجذر المطلوب. وبسطه سبعة وسبعون

وخمسمائة ومربع البسط تسعة وعشرون وتسعمائة واثنان وثلاثون ألفا وثلاثمائة ألف هكذا 332929. اقسام هذا الخارج على الأئمة تخرج لك الثمانية عشر وما وقع به التقريب وذلك ثمن ثمن الجزء من سبعة عشر في الجزء من سبعة عشر هكذا $\frac{1}{8}18$ $\frac{000}{881717}$ والله أعلم.

الباب الرابع في تجذير الكسور

20 أي أخذ جذرها منفردة كانت مثل المثاليين الأولين أو مع صحيح وهو قسمان الأول أن يكون للكسر جذر منطوق وكذا للإمام والثاني ما يخالف هذا.

(مبرهنة-9) فإن كان للبسط جذر منطوق وكذلك الإمام له على حدته جذر منطوق فسم جذر البسط من جذر الإمام فما كان فهو الجذر.

كجذر أربعة أتساع فإن الأربعة كسر مفرد على التسعة جذرها اثنان والتسعة إمامها وجذرها ثلاثة وذلك ثلثان

25 فإن الاثنين ثلثان من الثلاثة فجذر أربعة أتساع ثلثان.

وإن شئت فاضرب البسط في الإمام وخذ جذر الخارج واقسمه على الإمام. وهكذا في كل ما كان جذر بسطه منطوق وجذر إمامه منطوق أيضا.

2- نسمي : اسقط 8- وإن قيل... إلى آخر الفقرة هو إعادة لمثال سابق مع تصحيحات // 14- الجزء من سبعة عشر : الجزء // 20- المثاليين الأولين : في الهامش.

ففي المثال تضرب الأربعة في التسعة بسطة وثلثين وتأخذ جذر الستة والثلثين وهو ستة فتقسمه على التسعة بأن

تسميه منها يكن ثلثين فجزر أربعة أتساع ثلثان. وهذه الطريقة تصح في النوع الأول وهو ما جذر بسطه
وجذر إمامه منطقتين.

وفي النوع الثاني وهو ما يخالف ذلك كأربعة أثمان ونصف ثمن فانزل ذلك هكذا $\frac{1}{2} \frac{4}{8}$. ثم خذ جذر البسط وهو

5 ثلاثة : فهذا الكسر منتسب وبسطه تسعة بان تضرب أربعة في اثنين وتحمل الواحد وذلك تسعة وجذر التسعة
ثلاثة. وسمها أي الثلاثة من جذر الإمام وهو ثمانية واثنان: فإن الثمانية إمام للأربعة والاثنين إمام للواحد
فمجموعهما إمام لمجموع الكسرين والثمانية في اثنين بسنة عشر وجذر ستة عشر أربعين كما قال وهو أربعة تكن
ثلاثة أرباع وهي جذر المسألة هكذا $\frac{3}{4}$. وإن شئت فاضرب البسط وهو تسعة في الإمامين اثنين وثمانية بأربعة
وأربعين ومائة وجذر هذا اثنا عشر اقسما على الاثنين الإمام ينقسم فيخرج ستة اقسما على الثمانية
10 الإمام بأن تنسبها من الثمانية تكن ثلاثة أرباع.

وإن قيل كم جذر اثنين وربيع فانزل ذلك هكذا $2 \frac{1}{4}$ ثم اقسم جذر البسط وهو ثلاثة. أما البسط فبسط صحيح أول
كسر مفرد وذلك بأن تضرب الاثنين الصحيح في الإمام وهو أربعة وتحمل الواحد وذلك تسعة وجذرها ثلاثة على
جذر الإمام وهو اثنان لأن الإمام أربعة وهي قائمة من ضرب اثنين في اثنين فجزرها اثنان. يخرج لك واحد
ونصف وهو جذر المسألة هكذا $1 \frac{1}{2}$. وإن شئت فاضرب البسط وهو تسعة في الإمام وهو أربعة فيخرج

15 ستة وثلاثون وجذر هذا الخارج ستة فاقسمها على الإمام وهو أربعة يخرج واحد وربعان وذلك واحد ونصف.
وهكذا [229] //الوجهان في كل مثال ولو لم أذكر فيه إلا واحدا مثل أربعة أثمان ونصف ثمن $\frac{1}{2} \frac{4}{8}$ فخذ
جذر البسط ثلاثة وضعها على جذر الإمام وهو أربعة فجزر المسألة ثلاثة أرباع هكذا $\frac{3}{4}$.

ومثل خمسة أسباع وسبع السبع $\frac{1}{7} \frac{5}{7}$ فضع جذر البسط ستة على جذر الإمام بسبعة هكذا $\frac{6}{7}$ فجزر المسألة
سنة أسباع.

20 ومثل جذر ستة أتساع وربيع التسع فانزل ذلك هكذا $\frac{1}{4} \frac{6}{9}$ فضع جذر البسط خمسة على جذر الإمام ستة هكذا
 $\frac{5}{6}$ يكن جذر المسألة خمسة أسداس.

وإن قيل كم جذر ثلاثة أخماس وخمس الخمس هكذا $\frac{1}{5} \frac{3}{5}$ فالبسط ستة عشر جذرها أربعة والإمام خمسة
وعشرون من ضرب خمسة في خمسة ولو كانت الأئمة أكثر لضربناها كلها بعضها في بعض وجذرها خمسة
فاقسم جذر البسط الذي هو أربعة على جذر الإمام الذي هو خمسة تخرج أربعة أخماس $\frac{4}{5}$ وذلك جذر المسألة.

25 واضرب البسط الذي هو ستة عشر في الإمام الذي هو خمسة وعشرون تخرج أربعمائة هكذا 400 وجذرها
عشرون فاقسمها على الإمام الذي هو خمسة وعشرون تخرج أربعة أخماس.
وأما أن يخالف هذا بفتح همزة أما وهذا عدل لقوله فإن كان للبسط جذر الخ. ومخالفته تصدق بثلاثة أوجه :

4- هوما يخالف ذلك كأربعة : ذلك وكذلك أربعة // 13- لأن الإمام : الإمام // 16- مثل أربعة...إلى آخر الفقرة : إعادة لمثال سابق.
الأول : أن يكون كل واحد من البسط والإمام غير مجذور والثاني أن يكون البسط مجذورا والإمام غير مجذور

وهو الذي مثل له الناظم بعد والثالث بالعكس .

(ميرهنة-10) والعمل في الثلاثة بأن تضرب البسط في الإمام وخذ جذر الخارج بتقريب واقسمه على الإمام وما كان فهو جذر المسألة بتقريب. وقد أعلمتك أن هذا العمل صالح أيضا فيما إذا كان البسط مجزورا والإمام مجزورا.

5

ومثال من ذلك إذا قيل لك كم جذر أربعة أسداس ونصف سدس؟

فانزل ذلك هكذا $\frac{1}{2} \frac{4}{6}$ فاضرب البسط وهو تسعة حاصلة من ضرب أربعة في اثنين بثمانية وحمل الواحد في

الأئمة ستة واثنين يخرج لك ثمانية ومائة خذ جذرها بتقريب يكن عشرة وخمسين وذلك بأن تنزل المائة والثمانية

هكذا 108 وتضع الواحد تحت الواحد وتضربه في نفسه فيفنى الواحد فوفقه تضعفه وتضعه تحت الصفر فيكون عشرة فتبقى لك الثمانية والثمانية هي خمسان من العشرين الذي هو ضعف الجذر الذي هو عشرة وإنما قلت الثمانية باقية لأنه ليس في المرتبة التي بعدها غير مجزورة عدد فضلا عن أن يوضع تحتها ضعف الواحد وعن أن يوضع تحت الثمانية عدد يضرب في هذا الضعف وفي نفسه ولا عدد أيضا قبلها اقسامه على مسطح الأئمة وهو اثنا عشر لأنك إذا ضربت الستة في الاثنين يخرج اثنا عشر وعلى الخمسة التي هي مقام الخمسين الذين مع العشرة وذلك بأن تبسط العشرة والخمسين باثنين وخمسين اقسامها على الستة واثنين إمامي الاثني عشر

10

وعلى الخمسة وربتها مثلا هكذا 2 5 6 فاقسم على الاثنين اثنين وخمسين فيخرج ستة وعشرون اقسامها على الخمسة يبق واحد ضعه على الخمسة وتخرج خمسة ضعها على الستة يخرج لك خمسة أسداس وخمس سدس هكذا $\frac{0}{2} \frac{1}{5} \frac{5}{6}$ والأولى أن يذكر الإمام الذي هو الخمسة أيضا وكأنه استغنى عن ذكره قبل وأن يقول اقسامه

15

على الأئمة وكأنه قال مسطح لأن القسمة على المسطح في معنى القسمة على الأئمة وخرجت [230] // بها والمسألة بتقريب. وإذا بسطت هذا الجذر خرج لك ستة وعشرون لأنك تضرب الخمسة فوق الستة في الخمسة وهي إمام بخمسة وعشرين وتحمل الواحد الذي على الخمسة بستة وعشرين وهو بسط المنتسب. ولا تعبر الإثنين لأنها آخر لا كسر عليها، اضربها في مثلها يخرج لك ستة وسبعون وستمائة هكذا 676 اقسام هذا الخارج على الأئمة ونعني بالأئمة أربعة وستة وستة وخمسة وخمسة. وإنما زاد مثل الأئمة لمكان التربيع فإن التربيع تضعيف مثل الأئمة لتوافق خارج التربيع فإن التربيع ناشئ عن اعتبار زيادة الأئمة كذلك ولا بد أن تقدم في المرتبة أئمة مثل الذي كان لك أول المسألة ففي المسألة ستة فقدمها في هذا الترتيب وفيها اثنان ملغيان في

20

قوله يخرج لك خمسة أسداس وخمس سدس هكذا $\frac{1}{5} \frac{5}{6}$ بعد اعتبارها بالقسمة عليها معتبران في قوله فانزل ذلك

25

هكذا $\frac{1}{2} \frac{5}{6}$. فانزل الاثنين بعد الستة في هذا الترتيب وهي من تحليل الستة الأخرى إلى ثلاثة واثنين وذلك بأن

تحل الستة إحدى الستين إلى ثلاثة واثنين إذ تتركب من الثلاثة والاثنين فتضع الاثنين من تركيب الستة بعد

1- البسط والإمام : في الهامش // 2- الثالث : في الهامش // 3- والعمل في الثلاثة : في الهامش / بان تضرب : فاضرب // 12- الثمانية عدد يضرب : الثمانية يضرب // 17- قبل وأن : قبل ويرسمه هنا وأن // 18- خرجت : مطموسة // 19- خرج : مطموسة // 20- ولا تعبر الإثنين لأنها آخر لا كسر عليها : في الهامش // 22- وخمسة. وإنما : وخمسة. ولكن إن حلت الستة إلى اثنين وثلاثة كانت خمسة وذلك أن تزيد على الأئمة التي ربت فسامحها مفعول الربعة مثلها مفعول لتزيد فتزيد خمسة وستة فتكون ستة مرتين وخمسة مرتين واحلل الستة إلى ثلاثة واثنين وإنما // - 26 - $\frac{1}{2} \frac{5}{6}$: $\frac{1}{2} \frac{5}{6}$ // - 27 - من تركيب الستة : في الهامش.

السةة. وبع الخمسةة بعءهءا وءالءة بعء ذلك آءرا وءقسء ذلك العءء سهة وسبعبع وسمءاءة على ءالءة أولا ببقئ واءء ضعهءا علىها وبعء ء ءمسة وعشرون وءائءان اقسء هءا الآء ءلى ءمسة ءءقسء فضع صفر على ءمسة وبعء ءمسة وأربعون اقسءها على ءمسة الأءرى ءءقسء وبعء ءسعة اقسءها على الاءبعبع ببقئ واءء ضعه علىها وءءء ءربعه ضعهءا على السهة فبعء ءك أربعه أسءاس و نصف سءس وءا وقع به ءءقرب وءلك

$$5 \quad \text{ءلء ءمء ءمء نصف السءس هءءا} \cdot \frac{10014}{35526}$$

وءا ءكزه المصنف من ءءربب فب الأءمة ومن ءل السهة إلى ءالءة واءبعبع لا ببءبع بل عءم ءلك أولى فءكون الأءمة سهة مرءبعبع وءمسة مرءبعبع هءءا 5566 وءءا قسءء على ءلك سهة وسبعبع وسمءاءة ءء ءلءة ءمسة

$$\text{أسءاس و نصف سءس وءا وقع به ءءقرب وهو ءمء ءمء سءس سءس هءءا} \cdot \frac{1035}{5566}$$

وأمءال الإءام المءءور والبسط الءب لبس مءءورا أن بقال كم ءءر ءالءة أرباع $\frac{3}{4}$ ؟

10 فءضرب البسط فب الإءام فءأءء ءءزه ببءقرب فءءءه ءالءة و نصفا $\frac{1}{2}$ 3 فاقسءها على الإءام الءب هو أربعه بعء ء

سبعة أءمان هءءا $\frac{7}{8}$. وءلك ءءر ءالءة أرباع ببءقرب. وءا ربعةءه ءاء على ءالءة أرباع ببءن ءءن وهو قءر ءءقرب.

$$\text{وإن قبل كم ءءر سبع السبع هءءا} \frac{10}{7} \text{ ؟}$$

فبسط المسألة واءء مضروب فب الأءمة واءء فب سبعة بسبعة والسبعة فب السبعة ببسعة وأربعبع ءءرها سبعة اقسءها على الأءمة بعء سبع.

$$\text{وأمءال إءام وبسط بعبر مءءوربع ءمانبعه أءءار هءءا} \frac{8}{10}$$

اضرب البسط فب الإءام ءءء ءمانون وءءرها ءمانبعه وءمانبعه أءساع و نصف ءسع هءءا $\frac{18}{29}$. اقسءه على

$$\text{الإءام وهو عشرة ءءء ءمانبعه أءءار وءمانبعه أءساع العشر و نصف ءسع العشر [231] // هءءا} \frac{188}{2910}$$

$$\text{وإن سءء قاء ءمانبعه أءساع وربع ءمء ءسع هءءا} \frac{108}{459}$$

$$20 \quad \text{وإءا ضرب هءا ءءر فب مءله ءء ءء ءمانبعه أءءار وربع ءسع ءسع عشر العشر} \cdot \frac{10008}{4991010}$$

$$\text{وإن قبل كم ءءر ءمبعبع} \frac{2}{8} \text{ ؟}$$

فاضرب البسط وهو اءءان فب الإءام بسهة عشر فاقسء ءءر الآء ءلءة على الإءام ءءء أربعه أءمان وءلك نصف بعء زوال الاءءراك هءءا $\frac{1}{2}$.

وإن قبل كم ءءر سهة وربع ؟

1- آءرا وءقسء : آءرا من ءركبب السهة وءقسء. 11- ببءقرب. وءا ربعةءه ءاء على ءالءة أرباع ببءن ءءن وهو قءر ءءقرب. ببءقرب. فاضربها فب نفءها ءءء سهة أءمان وهو ءالءة أرباع وسبعة أءمان ءءن فوقع ءءقرب بسبعة أءمان ءءن // 15- على : من.

فالبسط خمسة وعشرون في الإمام بمائة جذرها عشرة. اقسمه على الإمام يخرج اثنان ونصف هكذا $\frac{1}{2}$.

وإن قيل كم جذر اثني عشر وربع هكذا $\frac{1}{4}12$ ؟ فقل ثلاثة ونصف هكذا $\frac{1}{2}3$.

وهذان المثالان من جذر الصحيح والكسر. ومن ذلك اثنان وربع هكذا $\frac{1}{4}2$ فالبسط تسعة وجذرها ثلاثة. اقسمه

على جذر المقام : المقام أربعة، جذره اثنان، فيخرج واحد ونصف وهو جذر تحقيقا لا تقريبا. لأن المقام الأربعة
5 وهو بسط الواحد الصحيح فالواحد ونصف ستة أرباع فاضربها في واحد ونصف بتسعة أرباع وهو اثنان وربع.

وإن قيل كم جذر ثلث وربع تسع هكذا $\frac{1}{4} \frac{1}{9}3$ ؟

فاضرب البسط وهو خمسة وسبعون في مائة وثمانية مركب المقامات تحصل ثمانية آلاف ومائة جذرها تسعون
اقسمها على المائة والثمانية بعد أن تحلها إلى أمتها هكذا 3 6 6 فاقسم على الثلاثة تخرج ثلاثون اقسما على
الستة الثانية تخرج خمسة انسيها من الستة الأولى في بداية السطر وهي ثانية في القسمة وهو خمسة أسداس
وهذا جذر محقق لأنك إذا ربعت خمسة أسداس بلغت الربع والثلث والتسع لأن المقام الجامع ستة وثلاثون وخمسة
10 أسداس ثلاثون وإذا ربعتها بمعنى رجعتها إلى خمسة أسداسها حصل خمسة وعشرون ونسبة ذلك إلى المقام ثلث
وربع وتسع.

وإن قيل كم جذر تسعين هكذا $\frac{2}{9}$ ؟

فسمي الأربعة عشر الحاصلة من ضرب البسط في المقام وهو ثلاثة وثلاثة أرباع من سبعة مقام الكسر يخرج

15 نصف وربع سبع هكذا $\frac{1}{4} \frac{1}{7}2$. وهو الجذر بتقريب. لأنك إذا ربعته يزيد على السبعين بربع سبع وهو

قدر التقريب. لأن المقام الجامع ثلاثة آلاف ومائة وستة وثلاثون ونصفه وربع سبعة ألف وستمائة وثمانون. وإذا
ربعته أي رددته إلى نصفه وربع سبعة حصل تسع مائة، وهي سبع المقام الجامع، وربع ربع سبع سبعة والله
أعلم.

[460] // وإذا أردت كعب عدد غير مكعب فاجعل مكانه ضلع المكعب قبله وشيئا أو بعده إلا شيئا. وتسقط المكعب الخارج في الضرب وتقابل بما يبقى من الأشياء والأموال فضل ما بين عددك المفروض والعدد الخارج من الضرب وتزيد الشيء على ما معك من العدد متى كان خارج الضرب أقل من عددك المفروض وتنقصه منه متى كان أكثر يكون التكعيب بتقريب فذلك أخذ ضلع المكعب بتقريب كما يؤخذ الجذر بتقريب.

5 (مثال) فإن قيل خذ ضلع عشرة فاجعل ضلعها اثنين وشيئا وكعب العدد والشيء يخرج ثمانية من العدد وكعب وربع كل واحد منهما واضرب مربع أحدهما في ثلاثة [461] // أمثال الآخر تخرج ستة أموال واثنان عشر شيئا فيكون معك من تكعيبه ثمانية من العدد وكعب وستة أموال واثنان عشر شيئا وكذلك كلما أردت تكعيب عدد وقسمت بقسمين فإنك تكعب كل واحد من القسمين وتضرب مربع كل واحد منهما في ثلاثة أمثال الآخر وتجمع الخارجات فيكون مكعب العدد ثم تسقط الكعب ليقع به التقريب وترجع المسألة إلى معادلة أصلية فيكون معك ستة أموال واثنان عشر شيئا وثمانية من العدد تعدل عشرة من العدد فتذهب الثمانية بثمانية من العشرة ويبقى معك ستة أموال واثنان عشر شيئا يعدل اثنين من العدد فتزد كل ما معك إلى سدسه وترجع المعادلة إلى مال وشيئين تعدل ثلثا من العدد $1 \frac{2}{3}$ فتعمل حكم الرابعة فيخرج لك كعب عشرة بتقريب وذلك واحد وجذر واحد وثلث.

1- مكانه : مطموسة / قبله وشيئا أو بعده إلا شيئا : قبله أو بعده وشيئا هو كعبه // 3- ما معك : ما معه // 11- ويبقى : وبقي.

ANALYSE MATHÉMATIQUE

La deuxième section sur le calcul de la racine carrée d'un nombre, qui n'est pas un carré parfait, par approximation

[Proposition 1

Soit A le nombre dont on veut calculer la racine carrée] : $A = n^2 + r$

$$\text{Si } r \leq n \quad \text{alors } \sqrt{A} \approx n + \frac{r}{2n}$$

$$\text{Si } r > n \quad \text{alors } \sqrt{A} \approx n + \frac{\min((r+1), (2n+2))}{\max((r+1), (2n+2))} \quad 1$$

Preuve²

La preuve est basée sur les résultats suivants :

1- Tout nombre A, qui n'est pas un carré parfait, est compris entre deux carrés consécutifs n^2 et $(n+1)^2$: $n^2 < A < (n+1)^2$.

2- Si a^2 , b^2 sont deux carrés consécutifs tel que $a^2 > b^2$ alors $a - b = 1$.

$$a^2 - b^2 = 2b + 1$$

3- Si a^2 , b^2 sont deux carrés consécutifs tel que $a^2 > b^2$ alors : $= 2a - 1$
 $= a + b$

Ces égalités découlent de l'égalité suivante : $a^2 = (b+1)^2$.

Exemple de cela

$$16 - 9 = 7$$

9 et 16 sont deux nombres carrés consécutifs qui vérifient :

$$= 2 \cdot 3 + 1$$

$$= 2 \cdot 4 - 1$$

$$= 3 + 4$$

Car : $16 = (3+1)^2 = 3^2 + 2 \cdot 3 + 1$.

Exemples

1- $\sqrt{156}$?

¹ - L'auteur a utilisé l'expression *rapport du plus petit au plus grand* qui est celle qu'al-Qalaṣādī et qu'al-Qaṭrawānī ont utilisée dans leurs écrits.

² - L'auteur a repris le raisonnement d'Ibn Haydūr mais il s'est exprimé à la manière d'al-Qaṭrawānī. Nous avons même constaté que dans chaque étape de son étude sur la racine carrée et la racine cubique il se base essentiellement sur *At-Tamhīṣ fī sharḥ at-talkhīṣ* et *Tuḥfat at-tullāb wa umniyat al-ḥussāb fī sharḥ mā ashkala min Raf' al-ḥijāb* d'Ibn Haydūr et peut être même sur *Rashf ar-Ruḍāb min thughūr a'omāl al-ḥisāb* d'al-Qaṭrawānī.

$$156=12^2 + 12$$

D'après la première formule de la proposition 1 nous avons :

$$\sqrt{156} \approx 12 + \frac{1}{2}$$

$$\text{Et } \left(12 + \frac{1}{2}\right)^2 = 156 + \frac{1}{4}.$$

$$2- \quad 30=5^2 + 5$$

$$\text{D'où } \sqrt{30} \approx 5 + \frac{1}{2} \quad \text{et } \left(5 + \frac{1}{2}\right)^2 = 30 + \frac{1}{4}.$$

$$3- \quad 1332=36 + 36$$

$$\text{D'où } \sqrt{1332} \approx 36 + \frac{36}{2 \cdot 36} = 36 + \frac{1}{2} \quad \text{et } \left(36 + \frac{1}{2}\right)^2 = 1332 + \frac{1}{4}.$$

$$4- \quad \sqrt{637} ?$$

$$637=25^2 + 12$$

$$\sqrt{637} \approx 25 + \frac{12}{50} = 25 + \frac{2}{10} + \frac{2}{5} \left(\frac{1}{10}\right).$$

$$5- \quad \sqrt{5} ?$$

$$5 = 2^2 + 1, \quad 1 < 2.$$

$$\sqrt{5} \approx 2 + \frac{1}{4}$$

$$6- \quad \sqrt{15650} ?$$

$$15650 = (125)^2 + 25$$

$$\sqrt{15650} \approx 125 + \frac{25}{2 \cdot 125}$$

$$7- \quad \sqrt{154} ?$$

$$154=12^2 + 10$$

$$\sqrt{154} \approx 12 + \frac{10}{24} = 12 + \frac{2}{6} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{6}\right)$$

$$\text{Et } \left(12 + \frac{2}{6} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{6}\right)\right)^2 = 154 + \frac{1}{6} + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{6} \left(\frac{1}{6}\right)\right)$$

$$8- \quad \sqrt{28} ?$$

$$28=5^2 + 3$$

$$\sqrt{28} \approx 5 + \frac{3}{10} \quad \text{et} \quad \left(5 + \frac{3}{10}\right)^2 = 28 + \frac{9}{10} \left(\frac{1}{10}\right).$$

9- $\sqrt{40}$?

$$\sqrt{40} \approx 6 + \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad \left(6 + \frac{1}{3}\right)^2 = 40 + \frac{1}{9}.$$

10- $\sqrt{1040}$?

$$1040 = 32^2 + 16$$

$$\sqrt{1040} \approx 32 + \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad \left(32 + \frac{1}{4}\right)^2 = 1040 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{8}\right).$$

[Exemples lorsque le reste r est plus grand que la racine exacte n :]

1- $\sqrt{95}$?

14

L'extraction de la racine exacte se fait de la manière suivante

95
•
9

$$\text{D'où } 95 = 9^2 + 14 \quad \text{avec } 14 > 9 \quad \text{et} \quad \sqrt{95} \approx 9 + \frac{14+1}{2 \cdot 18+2} = 9 + \frac{15}{20} = 9 + \frac{3}{4}.$$

$$\text{Avec } \left(9 + \frac{3}{4}\right)^2 = \left(\frac{39}{4}\right)^2 = \frac{1521}{16} = 95 + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4}\right).$$

2- $\sqrt{22}$?

$$22 = 4^2 + 6 \quad \text{et} \quad \sqrt{22} \approx 4 + \frac{7}{10}$$

$$\text{Avec } \left(4 + \frac{7}{10}\right)^2 = \left(\frac{47}{10}\right)^2 = 22 + \frac{9}{10} \left(\frac{1}{10}\right).$$

3- $\sqrt{43}$?

$$43 = 6^2 + 7 \quad \text{et} \quad \sqrt{43} \approx 6 + \frac{8}{14} = 6 + \frac{4}{7}.$$

$$\text{Avec } \left(6 + \frac{4}{7}\right)^2 = \left(\frac{46}{7}\right)^2 = \frac{2116}{49} = 43 + \frac{1}{7} + \frac{2}{7} \left(\frac{1}{7}\right).$$

4- $\sqrt{95}$?

$$95 = 9^2 + 14 \quad \text{et} \quad \sqrt{95} \approx 9 + \frac{15}{20} = 9 + \frac{3}{4}.$$

$$\text{Avec } \left(9 + \frac{3}{4}\right)^2 = \left(\frac{39}{4}\right)^2 = \frac{1521}{16} = 95 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{8}\right).$$

5- $\sqrt{5432}$?

$$5432 = 73^2 + 103 \quad \text{et} \quad \sqrt{5432} \approx 73 + \frac{104}{148} = 73 + \frac{26}{37}.$$

$$\text{Avec} \left(73 + \frac{26}{37}\right)^2 = \left(\frac{2727}{37}\right)^2 = \frac{7436592}{37 \cdot 37} = 5432 + \frac{3}{37} + \frac{10}{37} \left(\frac{1}{37}\right).$$

6- $\sqrt{15800}$?

$$15800 = 125^2 + 175 \quad \text{et} \quad \sqrt{15800} \approx 125 + \frac{2}{3} + \frac{2}{7} \left(\frac{1}{9}\right).$$

7- $\sqrt{655}$?

$$655 = 25^2 + 30 \quad \text{et} \quad \sqrt{655} \approx 25 + \frac{31}{52} = 25 + \frac{7}{13} + \frac{3}{4} \left(\frac{1}{13}\right)$$

[Proposition 2]³

$$\sqrt{A} = \frac{\sqrt{Ab^2}}{b} \quad \text{tel que } b^2 > A$$

Exemples

1- $\sqrt{2}$?

$$\sqrt{2.4} = \sqrt{8} \approx 2 + \frac{5}{6} = \frac{17}{6}.$$

$$\sqrt{2} = \frac{\sqrt{8}}{2} \approx \frac{17}{12} = 1 + \frac{2}{6} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{6}\right).$$

$$\text{Avec} \left(\frac{17}{12}\right)^2 = 2 + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{6} \left(\frac{1}{6}\right)\right).$$

2- $\sqrt{5}$?

$$\sqrt{5} = \frac{\sqrt{5.9}}{3} = \frac{\sqrt{45}}{3} \approx \frac{6 + \frac{5}{7}}{3} = 2 + \frac{1}{7} + \frac{2}{3} \left(\frac{1}{7}\right)^4.$$

[Proposition 3]

$$\text{Si } \left((n+1)^2 - A\right) \leq (n+1) \quad \text{alors} \quad \sqrt{A} \approx (n+1) - \frac{\left((n+1)^2 - A\right)}{2(n+1)}$$

Exemples

$$\sqrt{12} \approx 4 - \frac{4^2 - 12}{2 \cdot 4} = 4 - \frac{1}{2} = 3 + \frac{1}{2}$$

³ - L'auteur a précisé que ce procédé est utilisé dans le but d'affiner l'approximation.

⁴ - L'auteur a écrit 18, qui est la valeur du dénominateur, sous forme du produit 2.9. Ce qui l'a amené à exprimer la

valeur de la fraction en fonction des nombres 2 et 9 au 260. $\sqrt{5} \approx 2 + \frac{2}{9} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{9}\right).$

$$\sqrt{8} \approx 3 - \frac{1}{6} = 2 + \frac{5}{6}$$

[Proposition 4]

$$\text{Si } \left((n+1)^2 - A \right) > (n+1) \quad \text{alors} \quad \sqrt{A} \approx (n+1) - \frac{\left((n+1)^2 - A \right) - 1}{2(n+1) - 2}$$

Exemple

$$\sqrt{10} ?$$

$$\sqrt{10} \approx 4 - \frac{6-1}{6} = 3 + \frac{1}{6}.$$

$$\text{Avec } \left(3 + \frac{1}{6} \right)^2 = 10 + \frac{1}{6} \left(\frac{1}{6} \right).$$

[Proposition 5]⁵

Nous pouvons exprimer la valeur approchée du nombre irrationnel \sqrt{A} en fonction du nombre [entier] carré le plus proche de A comme suit :

$$\text{Si } A \text{ est plus proche de } n^2 \quad \text{alors} \quad \sqrt{A} \approx n + \frac{A - n^2}{2n}$$

[Proposition 6]

$$\text{Si } A \text{ est plus proche de } (n+1)^2 \quad \text{alors} \quad \sqrt{A} \approx (n+1) - \frac{(n+1)^2 - A}{2(n+1)}$$

Exemple

$$\sqrt{15} ?$$

$$\sqrt{15} \approx 4 - \frac{16-15}{2.4} = 4 - \frac{1}{8} = 3 + \frac{7}{8}.$$

$$\text{Avec } \left(3 + \frac{7}{8} \right)^2 = 15 + \frac{1}{8} \left(\frac{1}{8} \right).$$

Preuve

1- Preuve de la proposition 4

$$\text{On pose } \sqrt{A} = n + \frac{p}{q}.$$

$$A = \left(n + \frac{p}{q} \right)^2 = n^2 + \left(\frac{p}{q} \right)^2 + 2n \left(\frac{p}{q} \right).$$

$$A - n^2 = 2n \left(\frac{p}{q} \right) + \left(\frac{p}{q} \right)^2$$

$$\text{Si on pose } \left(\frac{p}{q} \right)^2 \approx 0 \quad \text{on obtient } A - n^2 \approx 2n \left(\frac{p}{q} \right).$$

⁵ - Le contenu de cette proposition est le même que celui de la première expression de la proposition 1.

Ainsi, $\frac{p}{q} \approx \frac{A-n^2}{2n}$, avec $\frac{p}{q} < \frac{A-n^2}{2n}$

On conclut que l'approximation est par excès.

2- Preuve de la proposition 5

On pose $(n+1) = \sqrt{A} + \frac{p}{q}$

$$(n+1)^2 = A + \left(\frac{p}{q}\right)^2 + 2\sqrt{A} \cdot \left(\frac{p}{q}\right)$$

$$(n+1)^2 - A = \left(\frac{p}{q}\right)^2 + \left(\frac{p}{q}\right)(2\sqrt{A})$$

On pose aussi $\left(\frac{p}{q}\right)^2 \approx 0$ et on obtient :

$$(n+1)^2 - A \approx 2\left(\frac{p}{q}\right) + (2\sqrt{A})\left(\frac{p}{q}\right) = 2\left(\frac{p}{q}\right)(\sqrt{A} + u) = 2\left(\frac{p}{q}\right)(n+1).$$

Ainsi, $\frac{p}{q} \approx \frac{(n+1)^2 - A}{2(n+1)}$ Avec $\frac{p}{q} > \frac{(n+1)^2 - A}{2(n+1)}$.

L'approximation $\sqrt{A} \approx (n+1) - \frac{(n+1)^2 - A}{2(n+1)}$ est alors par excès.

3- Prouvons aussi que $(n+1) - \frac{(n+1)^2 - A}{2(n+1)} = n + \frac{(A-n^2)+1}{2n+2}$.

Effectivement, $(n+1) - \frac{(n+1)^2 - A}{2(n+1)} = n + \frac{1 \cdot (2(n+1)) - ((n+1)^2 - A)}{2(n+1)}$.

Et comme $(n+1)^2 - n^2 = 2(n+1) - 1$ et $(n+1)^2 - n^2 = ((n+1)^2 - A) + (A - n^2)$.

Alors $(n+1) - \frac{(n+1)^2 - A}{2(n+1)} = n + \frac{(A-n^2)+1}{2n+2}$.

4- Prouvons aussi que lorsque $\left((n+1)^2 - A\right) > (n+1)$ alors

$$\sqrt{A} \approx (n+1) - \frac{\left((n+1)^2 - A\right) - 1}{2(n+1) - 2} = n + \frac{A - n^2}{2n}.$$

En effet,
$$\sqrt{A} \approx (n+1) - \frac{\left((n+1)^2 - A\right) - 1}{2(n+1) - 2} = n + \frac{\left((2n+1) - \left((n+1)^2 - A\right)\right)}{2n}$$

$$= n + \frac{A - n^2}{2n}$$

Exemple

$\sqrt{10}$?

$$\sqrt{10} \approx 4 - \frac{6-1}{2 \cdot 4 - 2} = 4 - \frac{5}{6} = 3 + \frac{1}{6}.$$

[Proposition 7]

Si $\left((n+1)^2 - A\right) = (n+1)$ alors $\left(A - n^2\right) = n$ et inversement.

Dans ce cas, le nombre dont on cherche la racine serait une moyenne proportionnelle entre n^2 et $(n+1)^2$: $\frac{n^2}{A} = \frac{A}{(n+1)^2}$.

Exemple

$\sqrt{12}$?

Nous constatons que $16 - 12 = 4 = \sqrt{16}$ et $12 - 9 = 3 = \sqrt{9}$.

$$\frac{9}{12} = \frac{12}{16} \text{ puisque } \frac{9}{12} = \frac{3}{4} \text{ et } \frac{12}{16} = \frac{3}{4}.$$

Nous déduisons que $\sqrt{12} \approx 3 + \frac{1}{2}$ et $\sqrt{12} \approx 4 - \frac{1}{2} = 3 + \frac{1}{2}$

D'où $\sqrt{12} \approx \frac{1}{2}(3+4)$

Dans le cas général $\sqrt{A} = \sqrt{n(n+1)} \approx \frac{1}{2}[n + (n+1)]$

[Remarque]

Concernant le procédé d'approximation $\sqrt{A} = \frac{\sqrt{A \cdot b^2}}{b}$ il est important de noter que⁶ :

- 1- Ce procédé d'approximation est très utilisé dans le domaine de l'astronomie. Les valeurs attribuées à b sont des puissances supérieures de 60.
- 2- Le choix de b très grand assure la précision de la valeur approchée. Aussi, si b est choisi plus petit que le nombre dont on cherche la racine la valeur obtenue serait moins précise.
- 3- Ce procédé d'approximation peut être utilisé pour le calcul de la racine carrée des fractions.

⁶ - L'auteur a repris intégralement la remarque d'Ibn Ha~~263~~²⁶³.

Preuve

Elle est basée sur l'égalité $\sqrt{a.b} = \sqrt{a}.\sqrt{b}$.

Exemples

$$\sqrt{4} = \frac{\sqrt{4.9}}{\sqrt{9}} = \frac{6}{3} = \frac{\sqrt{4}.\sqrt{9}}{\sqrt{9}}$$

$$\text{De même } \sqrt{9} = \frac{\sqrt{9.4}}{\sqrt{4}} = \frac{6}{2} = \frac{\sqrt{9}.\sqrt{4}}{\sqrt{4}}$$

$$\sqrt{6} = \frac{\sqrt{6.4}}{2} \left[= \frac{\sqrt{24}}{2} \approx 2 + \frac{9}{20} \right] \quad \text{mais} \quad \sqrt{6} = \frac{\sqrt{6.9}}{3} \left[= \frac{\sqrt{54}}{3} \approx 2 + \frac{1}{3} + \frac{5}{3} \left(\frac{1}{14} \right) \right]$$

La première valeur est plus précise puisque $\left(2 + \frac{9}{20}\right)^2 = 6 + \frac{1}{400}$ et

$$\left(2 + \frac{1}{3} + \frac{5}{3} \left(\frac{1}{14} \right) \right)^2 = 6 + \frac{965}{1764}.$$

La troisième section sur l'affinement de l'approximation

[Proposition 8]

Soit x_1 une valeur approchée du nombre irrationnel \sqrt{A} obtenue par les procédés d'approximations cités.

$x_2 = x_1 - \frac{(x_1)^2 - A}{2x_1}$ est une deuxième valeur approchée qui est plus précise c'est-à-dire

qu'elle vérifie $((x_2)^2 - A) < ((x_1)^2 - A)$.

Exemples

1- $\sqrt{6}$?

$$\sqrt{6} \approx 2 + \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \left(2 + \frac{1}{2}\right)^2 = 6 + \frac{1}{4}$$

$$x_2 = \left(2 + \frac{1}{2}\right) - \frac{\frac{1}{4}}{5} = \left(2 + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{20}$$

$$= 2 + \frac{10-1}{4.5} = 2 + \frac{9}{20}$$

$$= 2 + \frac{2}{5} + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{5} \right)$$

$$\text{Et} \quad \left(2 + \frac{2}{5} + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{5} \right) \right)^2 = 6 + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4} \left(\frac{1}{5} \left(\frac{1}{5} \right) \right) \right).$$

[Deuxième méthode :]

$$\sqrt{6} = \frac{\sqrt{6.9}}{3} = \frac{\sqrt{54}}{3} \approx \frac{7 + \frac{2}{7} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{7}\right)}{3}$$

$$\sqrt{6} \approx 2 + \frac{2}{7} + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{7}\right)$$

$$\text{Avec } \left(2 + \frac{3}{7} + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{7}\right)\right)^2 = 6 + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{7}\left(\frac{1}{7}\left(\frac{1}{7}\right)\right)\right) + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{6}\left(\frac{1}{7}\left(\frac{1}{7}\right)\right)\right).$$

2- $\sqrt{10}$?

$$\sqrt{10} \approx 3 + \frac{1}{6} \quad \text{et} \quad \left(3 + \frac{1}{6}\right)^2 = 10 + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{6}\right).$$

$$\sqrt{10} = \frac{\sqrt{10.16}}{4} = \frac{\sqrt{160}}{4} \approx \frac{12 + \frac{17}{26}}{4} = 3 + \frac{4}{26} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{26}\right).$$

$$\text{Avec } \left(3 + \frac{4}{26} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{26}\right)\right)^2 = \frac{108441}{8.8.13.13} = 10 + \frac{4}{13}\left(\frac{1}{13}\right) + \frac{3}{8}\left(\frac{1}{8}\left(\frac{1}{13}\left(\frac{1}{13}\right)\right)\right).$$

$$\left(3 + \frac{4}{26} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{26}\right)\right)^2 = 10 + \frac{1}{13}\left(\frac{1}{13}\right) + \frac{2}{8}\left(\frac{1}{13}\left(\frac{1}{13}\right)\right) + \frac{1}{8}\left(\frac{1}{8}\left(\frac{1}{13}\left(\frac{1}{13}\right)\right)\right).$$

3- $\sqrt{5}$?

$$\sqrt{5} \approx 2 + \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad \left(2 + \frac{1}{4}\right)^2 = 5 + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right).$$

$$x_2 = \left(2 + \frac{1}{4}\right) - \frac{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)}{2\left(4 + \frac{1}{4}\right)} = 2 + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)}{9} = 2 + \frac{17}{8.9} = 2 + \frac{2}{9} + \frac{1}{8}\left(\frac{1}{9}\right).$$

$$\text{Avec } \left(2 + \frac{2}{9} + \frac{1}{8}\left(\frac{1}{9}\right)\right)^2 = 5 + \frac{1}{8}\left(\frac{1}{8}\left(\frac{1}{9}\left(\frac{1}{9}\right)\right)\right).$$

4- $\sqrt{18}$?

$$\sqrt{18} \approx 4 + \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad \left(4 + \frac{1}{4}\right)^2 = 18 + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right).$$

$$x_2 = \left(4 + \frac{1}{4}\right) - \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)}{2\left(4 + \frac{1}{4}\right)} = 2 + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{8}\right)}{8 + \frac{1}{2}} = \left(4 + \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{1}{17}\right) = 4 + \frac{4}{17} + \frac{1}{8}\left(\frac{1}{17}\right).$$

$$\text{Avec } \left(4 + \frac{4}{17} + \frac{1}{8} \left(\frac{1}{17}\right)\right)^2 = \left(\frac{577}{8.17}\right)^2 = \frac{332929}{8.8.17.17} = 18 + \frac{1}{8} \left(\frac{1}{17} \left(\frac{1}{17}\right)\right).$$

La quatrième section sur la racine carrée d'un nombre fractionnaire
[Proposition 9]

$$\text{Si } a \text{ et } b \text{ sont des carrés parfaits alors } \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

Exemples

$$1- \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3} \quad \text{ou bien} \quad \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{4.9}}{9} = \frac{\sqrt{36}}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}.$$

$$2- \sqrt{\frac{4}{8} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{8}\right)}?$$

$$\sqrt{\frac{4}{8} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{8}\right)} \left[= \sqrt{\frac{9}{2.8}} \right] = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}} = \frac{3}{4} \quad \text{ou bien} \quad \sqrt{\frac{4}{8} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{8}\right)} = \frac{\sqrt{9.2.8}}{16} = \frac{\sqrt{144}}{16} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}.$$

$$3- \sqrt{2 + \frac{1}{4}} \left[= \sqrt{\frac{9}{4}} \right] = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}} = \frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2} \quad \text{ou bien :}$$

$$\sqrt{2 + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{9.4}}{4} = \frac{\sqrt{36}}{4} = \frac{6}{4} = 1 + \frac{2}{4} = 1 + \frac{1}{2}.$$

$$4- \sqrt{\frac{5}{7} + \frac{1}{7} \left(\frac{1}{7}\right)} \left[= \sqrt{\frac{36}{7.7}} \right] = \frac{\sqrt{36}}{\sqrt{7.7}} = \frac{6}{7}.$$

$$5- \sqrt{\frac{6}{9} + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{9}\right)} \left[= \sqrt{\frac{25}{4.9}} \right] = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{4.9}} = \frac{5}{6}.$$

$$6- \sqrt{\frac{3}{5} + \frac{1}{5} \left(\frac{1}{5}\right)}?$$

$$\sqrt{\frac{3}{5} + \frac{1}{5} \left(\frac{1}{5}\right)} \left[= \sqrt{\frac{16}{5.5}} \right] = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{5.5}} = \frac{4}{5} \quad \text{ou bien} \quad \sqrt{\frac{3}{5} + \frac{1}{5} \left(\frac{1}{5}\right)} = \frac{\sqrt{16.25}}{25} = \frac{\sqrt{400}}{25} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}$$

Proposition 10

$$\text{Si } a \text{ et } b \text{ ne sont pas des carrés parfaits alors } \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a.b}}{b}$$

Exemples

1- $\sqrt{\frac{4}{6} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\right)}$?

$$\sqrt{\frac{4}{6} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\right)} = \frac{\sqrt{108}}{12} \approx \frac{10 + \frac{2}{5}}{12}.$$

Effectivement, $\sqrt{108} = \sqrt{10^2 + 8} \approx 10 + \frac{8}{20} = 10 + \frac{2}{5}$.

$$\sqrt{\frac{4}{6} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\right)} \approx \frac{52}{2.5.6} = \frac{26}{5.6} = \frac{5}{6} + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{6}\right).$$

Avec $\left(\frac{5}{6} + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{6}\right)\right)^2 = \frac{676}{5.5.6.2.3} = \frac{4}{6} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\right) + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\right)\right)\right)$.

2- $\sqrt{\frac{3}{4}}$?

$$\sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3.4}}{4} \approx \frac{3 + \frac{1}{2}}{4} = \frac{7}{8} \quad \text{et} \quad \left(\frac{7}{8}\right)^2 = \frac{6}{8} + \frac{7}{8}\left(\frac{1}{8}\right).$$

3- $\sqrt{\frac{1}{7}\left(\frac{1}{7}\right)}$?

$$\sqrt{\frac{1}{7}\left(\frac{1}{7}\right)} = \frac{\sqrt{49}}{7.7} = \frac{1}{7}.$$

4- $\sqrt{\frac{8}{10}}$?

$$\sqrt{\frac{8}{10}} = \frac{\sqrt{80}}{10} \approx \frac{8 + \frac{8}{9} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{9}\right)}{10}$$

$$\sqrt{\frac{8}{10}} \approx \frac{8}{10} + \frac{8}{9}\left(\frac{1}{10}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{9}\left(\frac{1}{10}\right)\right) = \frac{8}{9} + \frac{8}{9}\left(\frac{1}{10}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{5}\left(\frac{1}{9}\right)\right).$$

Avec $\left[\frac{8}{9} + \frac{8}{9}\left(\frac{1}{10}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{5}\left(\frac{1}{9}\right)\right)\right]^2 = \frac{8}{10} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{9}\left(\frac{1}{9}\left(\frac{1}{10}\left(\frac{1}{10}\right)\right)\right)\right)$.

5- $\sqrt{\frac{2}{8}}$?

$$\sqrt{\frac{2}{8}} = \frac{\sqrt{16}}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$

6- $\sqrt{6 + \frac{1}{4}}?$

$$\sqrt{6 + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{25.4}}{4} = \frac{\sqrt{100}}{4} = \frac{10}{4} = 2 + \frac{1}{2}.$$

7- $\sqrt{12 + \frac{1}{4}}?$

$$\sqrt{12 + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{49}{4}} = \frac{7}{2} = 3 + \frac{1}{2}.$$

8- $\sqrt{2 + \frac{1}{4}}?$

$$\sqrt{2 + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} = 2 + \frac{1}{4}.$$

9- $\sqrt{\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9}}?$

$$\sqrt{\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{75.108}}{3.4.9} = \frac{\sqrt{8100}}{3.4.9} = \frac{90}{3.6.6} = \frac{5}{6}.$$

Avec $\left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{25}{36} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9}.$

10- $\sqrt{\frac{2}{7}}?$

$$\sqrt{\frac{2}{7}} = \frac{\sqrt{14}}{7} \approx \frac{3 + \frac{3}{4}}{7} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{7}\right) \quad \text{et} \quad \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{7}\right)\right)^2 = \frac{2}{7} + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4} \left(\frac{1}{7} \left(\frac{1}{7}\right)\right)\right).$$

Effectivement, le carré du dénominateur étant $(2.4.7)^2 = 3136$ alors

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{7}\right)\right)^2 = \frac{900}{2.2.4.4.7.7} = \frac{2}{7} + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4} \left(\frac{1}{7} \left(\frac{1}{7}\right)\right)\right)$$

[Le calcul de la racine cubique d'un nombre qui n'est pas un cube parfait par approximation]

[Proposition]

Si on veut calculer la racine cubique d'un nombre $[A]$ qui n'est pas un cube parfait, [on pose $A = n^3 + r$ avec $n^3 < A < (n+1)^3$].

On pose [également] $\sqrt[3]{A} = n + x$ ou bien $[n + 1 = \sqrt[3]{A} + x \dots (*)^7]$.

Puis, on élève au cube et on obtient : $A = n^3 + 3n^2x + 3nx^2 + x^3$, [d'une manière analogue nous obtiendrons aussi $\sqrt[3]{A} = (n+1) - x$ et $A = (n+1)^3 - 3(n+1)^2x + 3(n+1)x^2 - x^3$].

En négligeant le terme x^3 nous aboutirons à la relation $A \approx n^3 + 3n^2x + 3nx^2$ [et d'un autre côté $A \approx (n+1)^3 - 3(n+1)^2x + 3(n+1)x^2 \dots (**)$ équation du second degré à résoudre].

$A - n^3 = 3n^2x + 3nx^2$ est la quatrième équation [dans le classement d'al-Khwārizmī] dont la solution trouvée, x , sera ajoutée à l'entier n puisque $n^3 < A$: la somme $(n + x)$ serait alors la racine cubique approchée du nombre A .

[Pour le cas $(*)$] la solution [de l'équation $(**)$] sera retranchée de l'entier $(n+1)$ [puisque] $A < (n+1)^3$: la différence $((n+1) - x)$ serait la racine cubique approchée du nombre A].

[Exemple]

Calculer $\sqrt[3]{10}$?

On pose $\sqrt[3]{10} = 2 + x$

D'où : $(2 + x)^3 = (\sqrt[3]{10})^3$.

$(2 + x)^3 = 8 + x^3 + 6x^2 + 12x$ et ce en appliquant la formule suivante :

$$(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2. \text{ [On obtient } 10 = 8 + x^3 + 6x^2 + 12x \quad (1)]$$

En posant $x^3 \approx 0$ l'équation (1) serait équivalente à $6x^2 + 12x + 8 = 10$ (2).

D'où $6x^2 + 12x = 2$. On divise par 6 et on obtient $x^2 + 2x = \frac{1}{3}$ qui est la quatrième équation [d'al-Khwārizmī].

$$[\text{D'où } x = \sqrt{1 + \frac{1}{3}} - 1 \text{ et } \sqrt[3]{10} \approx 2 + (\sqrt{1 + \frac{1}{3}} - 1) \text{ puisque } 10 > (2 + \sqrt{1 + \frac{1}{3}} - 1)^3]$$

$$\text{Par conséquent } \sqrt[3]{10} \approx 1 + \sqrt{1 + \frac{1}{3}}$$

⁷- L'auteur n'a pas évoqué ce cas d'une manière explicite il a seulement indiqué que la valeur de x sera ou bien ajoutée ou bien retranchée d'un nombre dont il n'a pas précisé la valeur. L'idée que nous avons exposée est celle qu'Ibn al-Bannā avait développée dans le *Raf' al-hijāb*.

III-2.
ANALYSE DES EXTRAITS DU *TALKHĪŞ*
ET DU
***RAFŪ AL-ḤIJĀB* D'IBN AL-BANNĀ**

**III-2. 1. Analyse mathématique d'une section du
Talkhīṣ a'ômāl al-ḥisāb d'Ibn al-Bannā**

**Extrait : Souissi Mohamed, *Talkhīṣ a'ômāl al-ḥisāb*, Texte établi,
annoté et traduit, Publications de l'université de Tunis, 1969
p. 64**

Une section du
***Talkhīṣ aʿmāl al-ḥisāb* d'Ibn al-Bannā⁸**

- (مبرهنة-1) وإن بقي شيء فسمه من ضعف الجذر الصحيح إن كان مثل الجذر أو أقل، وإن كان أكثر من الجذر فرد فيه واحدا وفي الجذر المضاعف إثنين ثم تسمى منه وتزيد التسمية على الجذر الصحيح، فما كان فهو الجذر الذي يضرب في نفسه فيأتي منه المطلوب جذره بتقريب.
- (مبرهنة-2) وإن أردت تدقيق التقريب فسمه من ضعف الجذر واسقط الخارج من الجذر ببق جذر مربعه أقرب إلى العدد المطلوب جذره من المربع الأول.
- (مبرهنة-3) وفي التقريب وجه آخر وهو أن يضرب العدد المطلوب جذره في عدد مربع أعظم منه ويؤخذ جذر المجتمع بتقريب، ويقسم على جذر المربع المضروب فيه فما خرج فهو الجذر المقرب.
- (مبرهنة-4) وأما تجذير الكسور فهو أن يضرب البسط في الإمام ويقسم جذر الخارج على الإمام. وإن كان للبسط جذر منطوق ولالإمام مثله فاقسم جذر البسط على جذر الإمام.

⁸ - SOUISSI, M. : *Ibn al-Bannā al-Marrākushī, Talkhīṣ aʿmāl al-ḥisāb*, [Ibn al-Bannā de Marrakech, l'abrégé des opérations du calcul], op. cit., p. 64.

ANALYSE MATHÉMATIQUE

[Proposition 1]

Pour tout nombre N qui s'écrit $N = n^2 + r$, n^2 étant le plus grand carré entier plus proche de N et $r \neq 0$ nous avons :

$$\text{Si } r \leq n \text{ alors } \sqrt{A} \approx n + \frac{r}{2n}$$

$$\text{Si } r > n \text{ alors } \sqrt{A} \approx n + \frac{r+1}{2n+2}$$

[Proposition 2]

Soit x_1 une valeur approchée de \sqrt{A} obtenue par la proposition 1 alors :

$x_2 = x_1 - \frac{(x_1)^2 - A}{2x_1}$ est une autre valeur approchée de \sqrt{A} plus précise que la première.

C'est-à-dire : $(x_1)^2 > (x_2)^2 > A$.

$$\text{Effectivement, } (x_1)^2 - (x_2)^2 = \left(\frac{(x_1)^2 - A}{2x_1} \right) \left(\frac{3((x_1)^2) + A}{2x_1} \right) > 0.$$

[Proposition 3]

Pour tout nombre A , nous avons $\sqrt{A} = \frac{\sqrt{Ab^2}}{b}$ avec (b^2) un nombre carré qui est plus grand que A .

[Proposition 4]

Pour tout nombres a, b nous avons :

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a.b}}{b}$$

$\sqrt{a.b}$ sera calculé par approximation en appliquant les formules précédentes.

Si a et b sont des carrés parfaits alors $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

III-2. 2. Analyse mathématique d'une section du
Rafô al-ḥijāb ân wujūh aômāl al-ḥisāb

**Extrait: Aballagh Mohamed, *Rafô al-ḥijāb d'Ibn al-Bannā*,
Edition critique, traduction française et analyse mathématique,
Thèse de Doctorat, Université de Paris I- Panthéon- Sorbonne,
1988
pp. 296, 407-409**

Une section du
Rafô al-hijāb ân wujūh aômāl al-hisāb⁹

(مبرهنة-1) فإذا أردت كعب عدد غير مكعب فاجعل كعبه ضلع المكعب قبله وشيئا أو ضلع المكعب بعده إلا شيئا، ثم كعبه، وتسقط المكعب الخارج في الضرب وتقابل ما يبقى بعددك المفروض يخرج الضرب الرابع أو الخامس، فتخرج الشيء من الضرب الرابع أو تخرجه من الخامس بالنقصان وتزيد الشيء على ما معه من العدد متى كان العدد الخارج في الضرب أقل من عددك المفروض وتنقصه منه متى كان أكثر، يكون الكعب بتقريب.

Une autre section du *Rafô al-ḥijāb ân wujūh a'ômāl al-ḥisāb*¹⁰

ويؤخذ جذر العدد بالتقريب من قبل المربع القريب إليه أبداً كان الأصغر أو الأكبر،
(ميرهنة-2) وصفة العمل فيه من جهة الأصغر أن تسمى الفضلة بينه وبين الأصغر من ضعف الجذر الأصغر
وتزيد التسمية على جذر الأصغر.

(البرهان) وعلته أن جذر العدد مقسوم بقسمين: جذر الأصغر وكسر. وضرب ذلك في مثله كضرب كل واحد في
نفسه وأحدهما في ضعف الثاني.

فتكون الفضلة بين العدد والمربع الأصغر مثل مربع الكسر وضرب الكسر في ضعف جذر الأصغر. فتتسامح
بإسقاط مربع الكسر وتجعل الفضلة مثل ضرب الكسر في ضعف جذر الأصغر. فاقسم الفضلة على ضعف جذر
الأصغر يخرج منه الكسر بتقريب.

وظاهر بين أن هذا الكسر الخارج أعظم من الكسر الحقيقي فلا يكون التقريب أبداً إلا زائداً على العدد المطلوب
جذره.

(ميرهنة-3) وصفة العمل فيه من جهة المربع الأكبر أن تسمى الفضلة بين عددك والمربع الأكبر من ضعف جذر
الأكبر وتنقص التسمية من جذر الأكبر.

كما ذكرنا هذا العمل في تدقيق التقريب فتأمله ثمة.

(البرهان) وعلة ذلك أن جذر المربع الأكبر مقسوم بجذر العدد وكسر. وضربه في مثله كضرب كل قسم منهما في
مثله وأحدهما في ضعف الثاني. فتكون الفضلة مثل مربع الكسر وضرب الكسر في ضعف جذر العدد.

فنتسامح بزيادة مربع الكسر فيكون المجتمع مثل ضرب الكسر في ضعف جذر المربع على ما قد عرفت في النوع
الأخير من أنواع الضرب بلا تنقيح إذا جعل أحد المضروبين الكسر والثاني جذر الأكبر.

فتجعل الفضلة مثل ضرب الكسر في ضعف جذر المربع. فاقسم الفضلة على ضعف جذر المربع فيخرج الكسر
بتقريب وهو أصغر من الكسر الحقيقي. فإذا طرح من جذر المربع الأكبر بقي جذر العدد بتقريب زائد أبداً.

لكن لما كان نقصان الكسر من جذر الأكبر مثل نقصان الفضلة من ضعف جذر الأكبر وتسمية الباقي من ضعف
جذر الأكبر وزيادة التسمية على جذر الأصغر، وذلك ظاهر من طرح الكسور.

لكن الباقي بعد طرح الفضلة من ضعف الجذر الأكبر هو مثل الفضلة التي بين عددك والمربع الأصغر وزيادة
واحد: لأن بين المربعين ضعف جذر أكبرهما إلا واحداً كما تقدم.

فلهذا إذا كان الباقي من عددك أكثر من الجذر فهو أقرب إلى المربع الأكبر فتزيد في ضعف الجذر إثنين ليكون
ضعف الجذر الأكبر. وتزيد في الفضلة واحداً لتكون هي الفضلة الباقية بعد طرح فضلة المربع الأكبر على عددك
من ضعف جذره وتزيد التسمية على جذر الأصغر كما بيناه.

(نتيجة)

(1) ويلزم منه أنه إذا كانت فضلة المربع الأكبر أعظم من جذره فتتقص منها واحداً ومن ضعف الجذر
الأكبر إثنين أبداً وحينئذ تسمى وتنقص التسمية من الجذر الأكبر.

(2) وظاهر بين أن الفضلة متى كانت مثل الجذر فالفضلة الأخرى مثل الجذر الآخر. والعدد وسط بين
المربعين وهو وسط في النسبة. فنسبة الأصغر إليه كنسبته إلى الأكبر لما قد عرفت في إيجاد الأعداد المتناسبة
من باب الجمع.

(مبرهنة-4) وأما الوجه الآخر في التقريب بطريق الضرب في المربع فإنه ينفع في أخذ جذور الدرج والدقائق. فإنها تصرف إلى الثواني أو الروابع ويأخذ جذرها لأن الثواني أجزاء من ستين في جزء من ستين من الدرجة. فصرف الدرج إلى الثواني يحصل منه ضربها في مربع ستين.

(مبرهنة-5) وبهذا يأخذ جذر الكسور: يضرب في مربع إمامها فيخرج ضرب البسط في الإمام فيقسم جذره على الإمام فافهم.

واختص الكسر والدرج والدقائق بذلك لأنه أقرب فيها وأكثر تدقيقا من الذي قبله ولكن لابد فيه من العمل الأول فهو الأصل.

(البرهان) وعلّة هذا العمل الثاني هو أن ضرب عدد في عدد وأخذ جذر الخارج كضرب جذر أحدهما في جذر الثاني.

(ملاحظة) ولأخذ جذر العدد وجه آخر بالحل على ما ذكر في باب الجمع إلا أنه لا يخرج به الجذر بالتقريب إلا ما ينحل إلى عددين بينهما واحد فإن الجذر نصف مجموعهما لأنه العدد الوسط بين مربعين.

ANALYSE MATHÉMATIQUE

[Proposition 1]

[Pour tout nombre non cube A , il existe un nombre entier n tel que $n^3 \leq A < (n+1)^3$ et a s'écrit $A = n^3 + r$] et on a :

$$\sqrt[3]{A} = \sqrt[3]{n^3 + r} \approx \frac{n}{2} + \sqrt{\frac{A-n^3}{3n} + \left(\frac{n}{2}\right)^2}$$

ou bien

$$\sqrt[3]{A} = \sqrt[3]{n^3 + r} \approx \frac{n+1}{2} + \sqrt{\left(\frac{n+1}{2}\right)^2 - \frac{(n+1)^3 - A}{3(n+1)}}$$

[Preuve]

a. On pose $\sqrt[3]{A} = n+u$, u étant un nombre inconnu qui vérifie $0 < u < 1$.

On a alors $A = n^3 + 3n^2u + 3nu^2 + u^3$.

En considérant $u^3 \approx 0$ on aboutit à l'équation $u^2 + nu = \frac{A-n^3}{3n}$ qui est la quatrième

[équation dans la classification d'al-Khwārizmī] dont la solution est $u = \sqrt{\frac{A-n^3}{3n} + \left(\frac{n}{2}\right)^2} - \frac{n}{2}$.

D'où la première formule : $\sqrt[3]{A} \approx \frac{n}{2} + \sqrt{\frac{A-n^3}{3n} + \left(\frac{n}{2}\right)^2}$.

b. En posant cette fois-ci $\sqrt[3]{A} = (n+1)-v$ avec $0 < v < 1$, on aura $A = (n+1)^3 - 3(n+1)^2v + 3(n+1)v^2 - v^3$.

Et en considérant $v^3 \approx 0$ on aboutit à l'équation $v^2 + \frac{(n+1)^3 - A}{3(n+1)} = (n+1)v$ qui est la cinquième [équation dans la classification d'al-Khwārizmī].

La solution de cette équation est $v = \left(\frac{n+1}{2}\right) - \sqrt{\left(\frac{n+1}{2}\right)^2 - \frac{(n+1)^3 - A}{3(n+1)}}$.

D'où la deuxième formule : $\sqrt[3]{A} \approx \frac{n+1}{2} + \sqrt{\left(\frac{n+1}{2}\right)^2 - \frac{(n+1)^3 - A}{3(n+1)}}$.

[Proposition 2]

Pour tout nombre non carré A il existe un nombre entier n tel que $n^2 < A < (n+1)^2$:

$$(1)^{11} \quad \text{Si } (A-n^2) < ((n+1)^2 - A) \text{ alors } \sqrt{A} = \sqrt{n^2 + r} \approx n + \frac{A-n^2}{2n}$$

¹¹ - C'est le cas où A est plus proche du plus petit carré.

[Preuve]

On pose $\sqrt{A} = n + u$ u étant une fraction [qu'on essaiera de déterminer par approximation].

Pour cela, on a : $A - n^2 = 2nu + u^2$.

On soustrait du second membre de l'égalité le terme u^2 et on obtient :

$$A - n^2 \approx 2nu. \text{ Ainsi, } u \approx \frac{A - n^2}{2n} \text{ et } \sqrt{A} \approx n + \frac{A - n^2}{2n}.$$

[Proposition 3]

$$(2)^{12} \quad \text{Si } (A - n^2) > ((n+1)^2 - A) \text{ alors } \sqrt{A} = \sqrt{n^2 + r} \approx (n+1) - \frac{(n+1)^2 - A}{2(n+1)}$$

[Preuve]

On pose $(n+1) = \sqrt{A} + u$ avec u une fraction [qu'on essaiera de déterminer par approximation].

$$(n+1)^2 - A = u^2 + 2\sqrt{A}u$$

En ajoutant le terme u^2 au deuxième membre de l'égalité on obtient :

$$(n+1)^2 - A \approx 2u^2 + 2\sqrt{A}u = 2u(\sqrt{A} + u) = 2u(n+1).$$

$$\text{Par conséquent, } \sqrt{A} \approx (n+1) - u \text{ c'est-à-dire } \sqrt{A} \approx (n+1) - \frac{(n+1)^2 - A}{2(n+1)}.$$

$$\text{Or, } (n+1) - \frac{(n+1)^2 - A}{2(n+1)} = n + \frac{2(n+1) - ((n+1)^2 - A)}{2(n+1)}.$$

$$\text{D'où la formule } \sqrt{A} = \sqrt{n^2 + r} \approx n + \frac{(A - n^2) + 1}{2(n+1)}.$$

[Résultats]

$$1\text{- Si } ((n+1)^2 - A) > (n+1) \text{ alors } \sqrt{A} \approx (n+1) - \frac{((n+1)^2 - A) - 1}{2(n+1) - 2}.$$

$$2\text{- Si } ((n+1)^2 - A) = (n+1) \text{ alors } A - n^2 = n.$$

$$\text{Dans ce cas, } A = n(n+1) \text{ et } A \text{ est défini par le rapport : } \frac{A}{n^2} = \frac{(n+1)^2}{A}.$$

La valeur approchée de \sqrt{A} est déterminée comme étant la moitié de la somme des deux racines : $\sqrt{A} \approx \frac{1}{2}((n+1) + n)$ ¹³.

[Proposition 4]

Pour tout nombre A nous avons :

$$\sqrt{A} = \frac{\sqrt{A.b^2}}{b}$$

¹² - C'est le cas où A est plus proche du plus grand carré 279

¹³ - Cet énoncé sera donné sous forme de remarque vers la fin de cette section..

Pour tout nombre b que l'on pourra choisir, éventuellement, comme une puissance quelconque de 60^{14} .

[Proposition 5]

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)b^2}}{b} = \frac{\sqrt{ab}}{b}$$

[Preuve]

La preuve des deux propositions est basée sur la relation suivante : $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$.

[En effet, $\frac{\sqrt{a \cdot b^2}}{b} = \frac{\sqrt{a} \cdot \sqrt{b^2}}{b} = \frac{\sqrt{a} \cdot b}{b} = \sqrt{a}$].

[Remarque]

Si un nombre A se décompose en produit de deux nombres entiers consécutifs la valeur approchée de sa racine carrée est donné par la formule suivante :

Si $A = n(n+1)$ alors $\sqrt{A} \approx \frac{1}{2}((n+1)+n)$

¹⁴- L'auteur a précisé que ce procédé est surtout utilisé dans la base sexagésimale.

IV-ANNEXES

IV-1. ANNEXE 1

Les procédés d'approximations de la racine carrée d'un nombre dans la tradition mathématique mésopotamienne

Certains textes babyloniens contiennent des nombres irrationnels mais les valeurs qui leurs sont attribués sont des nombres fractionnaires. La méthode ou bien le raisonnement, qui permettent de déterminer ces valeurs, n'ont pas été explicités. L'insuffisance d'informations qui pourraient expliquer le choix de telle ou telle autre valeur pourrait suggérer plusieurs interprétations et conjectures.

L'analyse des textes babyloniens, publiés à partir des tablettes qui ont été exhumées jusqu'à présent, nous informe que parmi les problèmes qui ont été étudiés par les calculateurs babyloniens figurent ceux qui sont consacrés à la résolution des équations du second degré. Les termes géométriques qui sont utilisés sont : le carré, la surface, le côté. Quant à la solution, elle est présentée comme le résultat d'un ensemble d'opérations arithmétiques données sous forme d'instructions. L'algorithme qui est exposé par ces calculateurs est celui de la résolution des équations du second degré connu de nos jours.

L'extraction de la racine carrée est une des opérations qui est évoquée dans ce calcul mais les données sont choisies de telle sorte qu'elle s'effectue sur un carré parfait¹⁵.

Dans d'autres textes, qui traitent des problèmes différents, cette opération est effectuée sur des nombres qui ne sont pas des carrés parfaits comme l'entier 2.

Deux valeurs ont été attribuées au nombre irrationnel $\sqrt{2}$: 1;25 et 1;24,51,10. La deuxième valeur est plus précise que la première. Elle est inscrite dans la tablette de Yale avec d'autres valeurs qui sont 0; 30 et 0; 42, 25,35 et un diagramme représentant un carré avec ses deux diagonales¹⁶. L'interprétation qui a été donnée au contenu de cette tablette est la suivante :

Calculer la diagonale d'un carré de côté 0;30 en attribuant la valeur 1;24,51,10 au nombre irrationnel $\sqrt{2}$.

En adoptant cette valeur et en appliquant le théorème de Pythagore nous retrouvons la valeur de la diagonale ainsi : $d = 0;30 \times \sqrt{2} = 0;30 \times 1;24,51,10 = 0;42,25,35$.

Le même théorème peut être utilisé pour résoudre le problème 6 de la tablette VAT 6598 qui consiste à déterminer la diagonale d'une porte rectangulaire de hauteur 40; et de largeur 10;

Ceci revient à effectuer le calcul suivant $\sqrt{(40)^2 + (10)^2} = 10\sqrt{17}$. Et la valeur qui a été attribuée au résultat est 41;15¹⁷.

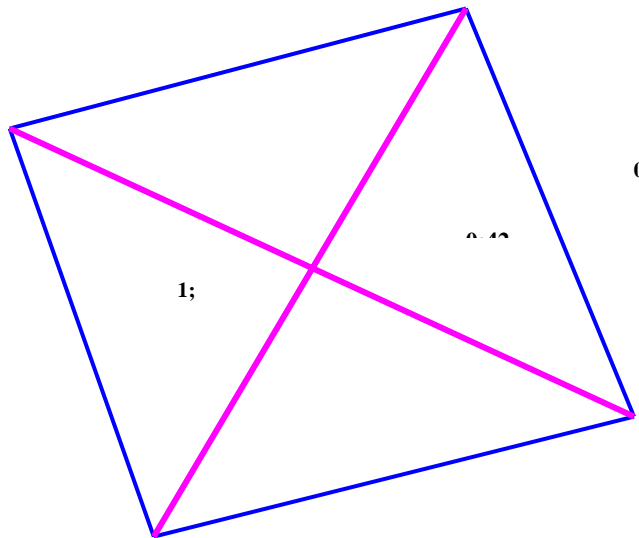
Nous allons exposer le procédé suggéré dans les études, qui ont été consacrées aux mathématiques babyloniennes, pour retrouver les valeurs approchées citées ci-dessus. Nous montrerons aussi les différentes manières d'utiliser ce procédé.

Dans YBC 7289 sont représentés le schéma et les nombres suivants :

¹⁵- Pour les textes babyloniens voir CAVEIN, M. : *La constitution du type mathématique de l'idéalité dans la pensée grecque*, Thèse de Doctorat, Université de Paris X, 1977.

¹⁶- CAVEIN, M. : *La constitution du type mathématique de l'idéalité dans la pensée grecque*, op. cit., Tome III, p. 1387.

¹⁷- CHARBERT, J.L. & BARBIN, E. & GUILLEMOT, J. & PAJUS, A. M. & BOROWCZYK, J. & DJEBBAR, A. & MARTZLOFF, J.C. : *Histoire d'algorithmes, du caillou à la puce*, op. cit., p. 229.



0; 30 représente le côté du carré.

Les deux valeurs 1; 24, 51, 10 et 0; 42, 25, 35 représentent respectivement $\sqrt{2}$, $0;30\sqrt{2}$.

Le résultat suivant $(1;24,51,10)^2 = 1;59,59,38,1,40$ permet de dire que la valeur attribuée au nombre irrationnel $\sqrt{2}$ est assez précise.

L'idée qui permet de retrouver ces valeurs utilise uniquement deux opérations : l'addition et la division qui expriment ensemble le concept de la moyenne arithmétique. Nous avons appliqué cette notion de deux manières différentes :

1-Le premier procédé

Nous considérons $x_1 = 1$ une première valeur approchée du nombre $\sqrt{2}$.

Elle est par défaut car elle vérifie : $(x_1)^2 = 1$.

Ensuite, nous considérons une deuxième valeur : $x_2 = \frac{2}{x_1} = 2$.¹⁸

Celle-ci est par excès.

Une troisième valeur est obtenue en utilisant la moyenne arithmétique :

$$x_3 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) = \frac{1}{2}(1 + 2) = \frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2} .$$

Elle vérifie $(x_3)^2 = 2 + \frac{1}{4}$.

Elle est meilleure que les deux précédentes et elle est par excès.

¹⁸- Si on prend par exemple a comme une valeur approchée de $\sqrt{2}$ et avec le fait que $2 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$, on pourra écrire $2 = \sqrt{2} \cdot a$. Ainsi, $b = \frac{2}{a}$ serait une deuxième valeur approchée qui sera par défaut si a est par excès et par excès sinon.

Nous pouvons calculer une quatrième valeur de la manière suivante :

$$x_4 = \frac{2}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{4}{3} = 1 + \frac{1}{3}.$$

Puis, comme x_4 est par défaut, une cinquième valeur approchée est obtenue en utilisant la moyenne arithmétique : $x_5 = \frac{1}{2}(x_3 + x_4) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + \frac{4}{3}\right) = \frac{17}{12} = 1 + \frac{5}{12}$

Dans la base sexagésimale, l'expression de cette valeur est $x_5 = 1 + \frac{5.60}{12.60} = 1 + \frac{25}{60} = 1;25$ qui est une des deux valeurs données dans les textes babyloniens.

Nous poursuivons le procédé pour retrouver d'autres valeurs. Mais avant, nous notons que x_5 est par excès car $(x_5)^2 = 2 + \frac{1}{144}$

Ainsi, nous calculons la sixième valeur : $x_6 = \frac{2}{\frac{17}{12}} = \frac{24}{17} = 1 + \frac{7}{17}$ qui est par défaut.

Ensuite, la septième valeur est obtenue en utilisant la moyenne arithmétique :

$$x_7 = \frac{1}{2}(x_5 + x_6) = \frac{1}{2}\left(\frac{17}{12} + \frac{24}{17}\right) = \frac{577}{2.12.17} = \frac{577}{408} = 1 + \frac{169}{408}.$$

Celle-ci s'exprime dans la base sexagésimale comme suit

$$x_7 = 1 + \frac{169.60}{2.12.17.60} = 1 + \frac{24}{60} + \frac{29.60}{2.17.60^2} = 1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{3}{17.60^2}$$

$$x_7 = 1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{180}{17.60^3} = 1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} + \frac{10}{17.60^3}$$

En considérant le nombre fractionnaire $\frac{10}{17.60^3}$ assez petit, nous pouvons attribuer au terme x_7 la valeur 1;24,51,10¹⁹.

Le choix de cette valeur et l'arrêt du processus à cette étape pourrait être expliqué par le fait qu'il est impossible de simplifier le nombre 17 du dénominateur de la dernière fraction²⁰.

2- Le deuxième procédé

La deuxième manière d'utiliser l'idée de la moyenne arithmétique est la suivante :

Nous posons $x_1 = 1$, la première valeur de $\sqrt{2}$ qui est par défaut. Et $x_2 = 2$, la deuxième valeur qui est par excès.

¹⁹-Nous pouvons évaluer la précision de cette valeur en exprimant son carré dans la base décimale :

$$(x_7)^2 = 2 + \frac{1}{166464}$$

²⁰- Cette supposition est proposée par M. Caveing, VOI 2014, M. : *La constitution du type mathématique de l'idéalité dans la pensée grecque*, op. cit., pp. 1149-1150.

Une troisième valeur est calculée ainsi $u_1 = x_3 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) = \frac{1}{2}(1 + 2) = \frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2}$.

Puis, en constatant que x_3 est par excès, nous calculons une quatrième valeur u_2 en utilisant la moyenne arithmétique entre x_3 et x_1 . On obtient $u_2 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{3}{2}\right) = 1 + \frac{1}{4}$ qui est par défaut.

Nous calculons d'autres valeurs approchées de la même manière à partir de deux valeurs obtenues par les calculs précédents dont l'une est par excès et l'autre est par défaut²¹. Voici les résultats qu'on obtient :

$$u_3 = \frac{1}{2}(u_1 + u_2) = 1,375 \quad (\text{par défaut})$$

$$u_4 = \frac{1}{2}(u_1 + u_3) = 1,4375 \quad (\text{par excès})$$

$$u_5 = \frac{1}{2}(u_1 + u_4) = 1,40625 \quad (\text{par défaut})$$

.

.

$$u_{20} = \frac{1}{2}(u_{18} + u_{19}) = 1,4142483743 \ 427734375 \quad (\text{par défaut})$$

Cette dernière valeur est celle qui coïncide à six chiffres après la virgule avec la deuxième valeur précise des babyloniens c'est-à-dire 1,414248.

Pour conclure cette section, nous signalons que le deuxième procédé ne permet pas d'atteindre la première valeur qui est 1; 25.

Mais, nous pouvons vérifier qu'il est possible de poursuivre le premier procédé afin d'obtenir une meilleure approximation que celle suggérée par les babyloniens. Nous présentons la généralisation de ce calcul comme suit :

En adoptant l'écriture $A = n^2 + r$.

Et, en considérant la première approximation $x_1 = n$ et la deuxième $x_2 = \frac{A}{n}$.

Une troisième valeur approchée est obtenue en utilisant la moyenne arithmétique :

$$x_3 = \frac{1}{2}\left(n + \frac{A}{n}\right).$$

$$x_3 \text{ est par excès puisque } (x_3)^2 = A + \left(\frac{r}{2n}\right)^2.$$

Nous poursuivons le calcul en remarquant que :

Si x_k est par excès alors $\frac{A}{x_k}$ est par défaut et inversement. Effectivement :

²¹- Le choix des valeurs est libre, il n'est pas soumis à des contraintes.

Si $x_k > \sqrt{A}$ alors $\frac{1}{x_k} < \frac{1}{\sqrt{A}}$ et $\frac{A}{x_k} < \frac{A}{\sqrt{A}} = \sqrt{A}$.

Et, si $x_k < \sqrt{A}$ alors $\frac{1}{x_k} > \frac{1}{\sqrt{A}}$ et $\frac{A}{x_k} > \frac{A}{\sqrt{A}} = \sqrt{A}$.

Nous obtenons ainsi une suite de nombre $(x_n)_n$ définie ainsi :

$$\begin{cases} x_1 = n \\ x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{A}{x_n} \right) \end{cases}$$

Nous avons déjà vérifié que cette suite converge vers \sqrt{A} .

Tablette de Yale



IV-2. ANNEXE 2

Les procédés d'approximation de la racine carrée et de la racine cubique d'un nombre dans la tradition mathématique grecque

Le nombre irrationnel \sqrt{A} , A étant un nombre entier qui n'est pas un carré parfait, a été considéré dans les textes mathématiques grecs comme une grandeur géométrique que l'on peut construire à l'aide de la règle et du compas. La proposition 14 du deuxième livre des *Eléments* d'Euclide (III^e s. av. J.-C.) propose une méthode pour le représenter géométriquement²². D'autres méthodes ont été exposées par Euclide.

Certains mathématiciens et astronomes ont exprimé la valeur de l'irrationnel \sqrt{A} en nombres fractionnaires. Deux procédés au moins ont été utilisés dans la tradition mathématique grecque pour déterminer ces valeurs : Le premier est celui qui a été clairement décrit par Héron d'Alexandrie. Le deuxième a été exposé par Théon (III^e s.) en utilisant une représentation géométrique.

1- Les procédés décrits par Héron d'Alexandrie

Dans son ouvrage intitulé les *métriques*, Héron d'Alexandrie (vécu vraisemblablement vers I^e s.) a donné des indications sur des méthodes qui permettent de calculer la racine carrée d'un nombre qui n'est pas un carré parfait et la racine cubique d'un nombre qui n'est pas un cube parfait.

L'ouvrage est divisé en trois livres : le premier sur la mesure des surfaces, le deuxième sur la mesure des volumes et le troisième sur la division des figures dans un rapport donné²³.

Le procédé d'approximation de la racine carrée

Dans le livre I, Héron a décrit une méthode d'approximation de la racine carrée sur un exemple précis. Il a explicité les étapes importantes du procédé et a exposé l'idée des approximations successives.

C'est le calcul de la surface d'un triangle dont les côtés sont 7, 8, 9, qui a amené Héron à évaluer $\sqrt{720}$.

Il a d'abord écrit $729 = (27)^2 = 720 + 9$.

Puis, il a donné la première approximation : $\sqrt{720} \approx \frac{1}{2} \left(27 + \frac{720}{27} \right) = 26 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} \right)$.

Il a aussi évalué l'erreur en calculant le carré de cette valeur : $\left(26 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} \right) \right)^2 = 720 + \frac{1}{36}$.

Ensuite, il a suggéré de minimiser cette erreur en répétant les mêmes opérations sur le nombre carré $720 + \frac{1}{36}$.²⁴

Dans le même ouvrage, il a donné l'approximation $\sqrt{63} \approx 7 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$. Ce résultat s'obtient directement en appliquant le procédé qu'il a décrit²⁵.

²²- VITRAC, B. : *Euclide, Les Eléments*, Presses Universitaires de France, Paris, vol. 1, 1990, p. 361.

²³- HEATH, T. : *A history of Greek mathematics*, New York, Dover Publications, Inc, vol. 2, pp. 308, 316-318.

²⁴- HEATH, T. : *A history of Greek mathematics*, op. cit., p. 324. CHARBERT, J.L. & BARBIN, E. & GUILLEMOT, M. & PAJUS, A. M. & BOROWCZAK, J. & DJEBBAR, A. & MARTZLOFF, J.C. : *Histoire d'algorithmes, du caillou à la puce*, op. cit., p. 231.

Heath a signalé que Héron a utilisé dans le même livre l'approximation suivante $\sqrt{3} \approx \frac{26}{15}$ sans préciser le procédé qui permet de l'obtenir.

Pour cet exemple, nous remarquons que la valeur calculée par le procédé, qu'il avait décrit, est moins précise. Mais la réduction de l'erreur permet d'obtenir une meilleure valeur :

Effectivement, la première valeur est $\frac{1}{2}\left(2 + \frac{3}{2}\right) = \frac{7}{4}$ et vérifie $\left(\frac{7}{4}\right)^2 = 3 + \frac{1}{16}$.

Mais, la deuxième est $\frac{97}{56}$ et elle vérifie : $\left(\frac{97}{56}\right)^2 = 3 + \frac{1}{3136}$ avec

$$\left(\frac{97}{56}\right)^2 - \left(\frac{26}{15}\right)^2 < 0.$$

Nous présentons l'idée principale de ce procédé dans le cas d'un nombre quelconque comme suit :

Soit A un nombre qui n'est pas un carré parfait et posons $(n+1)^2$ le carré le plus proche de lui. $\sqrt{A} \approx \frac{1}{2}\left((n+1) + \frac{A}{(n+1)}\right)$.

Cette valeur est par excès car : $\left[\frac{1}{2}\left((n+1) + \frac{A}{(n+1)}\right)\right]^2 = A + \left[\frac{(n+1)^2 - A}{2(n+1)}\right]^2$.

Pour minimiser l'erreur $\left[\frac{(n+1)^2 - A}{2(n+1)}\right]^2$, la deuxième valeur approchée suggérée est :

$$\sqrt{A} \approx \frac{1}{2}\left(x_1 + \frac{A}{x_1}\right).$$

L'erreur commise est $\left[\frac{(x_1)^2 - A}{2(x_1)}\right]^2$ avec $\left[\frac{(x_1)^2 - A}{2(x_1)}\right]^2 < \left[\frac{(n+1)^2 - A}{2(n+1)}\right]^2$.

Le procédé d'approximation de la racine cubique

Dans le livre II, certains calculs ont amené Héron à calculer $\sqrt[3]{100}$. Il a donné la valeur suivante $\sqrt[3]{100} \approx 4 + \frac{9}{14}$ ²⁶ en décrivant le procédé qu'il a utilisé :

Il a d'abord écrit $4^3 = 64 < 100 < 125 = 5^3$.

Puis, il a calculé la valeur approchée comme suit : $\sqrt[3]{100} \approx 4 + \frac{5(100 - 64)}{5(100 - 64) + 100} = 4 + \frac{180}{280} = 4 + \frac{9}{14}$.

D'après Heath le nombre 100 qui est ajouté dans le dénominateur n'est pas le même que celui qui est utilisé dans l'opération précédente. Dans la première opération, 100 représente le nombre dont on cherche la racine cubique. Mais lorsqu'il est ajouté, il est considéré égal à 4×25 . Ainsi, il serait possible d'écrire la formule de la manière suivante :

²⁵ - HEATH, T. : *A history of Greek mathematics*, op. cit. 288 326.

²⁶ - Op. cit., vol. 1, p. 64.

$$\sqrt[3]{A} \approx n + \frac{(n+1) \times d_2}{(n+1) \times d_1 + n \cdot d_2} \quad \text{avec } n \text{ un entier qui vérifie } n^3 < A < (n+1)^3, \quad d_1 = A - n^2 \quad \text{et} \\ d_2 = (n+1)^3 - A^{27}.$$

Méthode de Théon d'Alexandrie

Dans son commentaire sur l'*Almageste* de Ptolémée, Théon a proposé une interprétation géométrique au procédé d'approximation qui détermine la valeur du nombre irrationnel $\sqrt{4500}$ qui a été donnée par Ptolémée égale à $67;4,55$ ²⁸.

Nous allons exposer la méthode de Théon dans le cas général c'est-à-dire pour la racine carrée d'un nombre quelconque. Ensuite, nous présenterons ses calculs pour le cas particulier $\sqrt{4500}$.

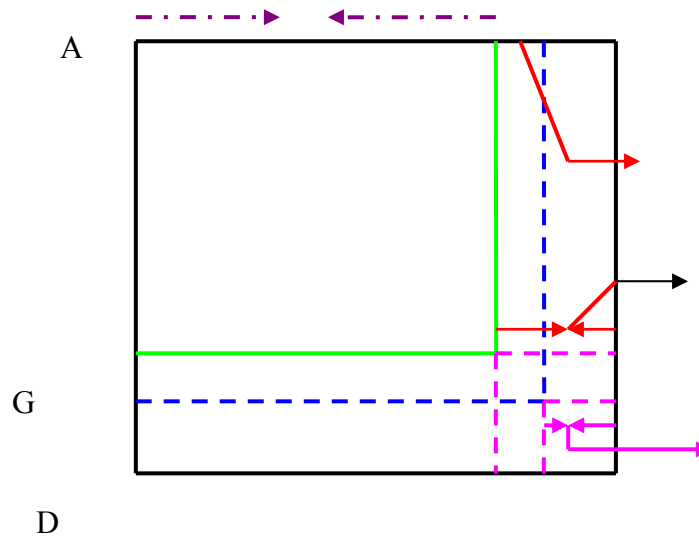
1- Dans le cas général :

Nous nous proposons de calculer une valeur approchée du nombre irrationnel \sqrt{A} .

Pour cela, on représente le nombre A comme la surface du carré $ABCD$.

On pose $A = n^2 + r$, n étant le plus grand carré plus petit que A .

Le carré $(AEFG)$ représente n^2 et la surface du gnomon $(EBCDGF)$ représente le reste $(A - n^2)$.



Le calcul d'une valeur approchée de x , qui vérifie $x = \sqrt{A} - n$ et qui est représentée par le segment de droite $[EB]$ se fait par étapes :

²⁷- Pour justifier la formulation, Heath a utilisé l'idée qui consiste à négliger les fractions inférieures à l'unité. Nous signalons que Héron n'évoque pas cette notion même pour l'extraction de la racine carrée. Voir HEATH, T. : *A history of greek mathematics*, vol. 2, op. cit., p. 341.

²⁸- CHARBERT, J.L. & BARBIN, E. & GUILLEMOT, M. & PAJUS, A. M. & BOROWCZYK, J. & DJEBBAR, A. & MARTZLOFF, J.C. : *Histoire d'algorithmes, du caillou à la puce*, op. cit., pp. 233-234. HEATH, T. : *A history of Greek mathematics*, op. cit., vol. 1, pp. 60-689

a- On pose $u_1 = \frac{A-n^2}{2n}$ puis on considère $(n+[u_1])$ comme une valeur approchée du nombre \sqrt{A} :

On exprime le numérateur $(A-n^2)$ en minutes puis on effectue la division et on pose $EH=[u_1]=v_1$.

Si $v_1 < (\sqrt{A}-n)$ alors $(n+v_1)$ serait une valeur approchée par défaut.

b- On pose alors $x'=\sqrt{A}-(n+v_1)$. Et de la même manière la surface du gnomon $(HBCDJI)$ représenterait le reste $(A-(n+v_1)^2)$.

En posant $v_2 = \left[\frac{A-(n+v_1)^2}{2(n+v_1)} \right]$, et $(n+v_1+v_2)$ serait une deuxième valeur approchée du nombre irrationnel \sqrt{A} .

Nous pouvons répéter ce procédé autant de fois qu'on veut afin d'obtenir une valeur plus proche de \sqrt{A} .

2- Pour le cas $A=4500$

Nous avons : $v_1 < (\sqrt{A}-n)$ ainsi la première approximation est par défaut.

$$\text{Effectivement, } 4500=(67)^2+11, \quad \frac{11.60}{2.67} = \frac{660'}{134} \approx \left[\frac{660'}{134} \right] = 4'.$$

$$\text{D'où } x_1=67;4 \quad \text{et} \quad \left(67+\frac{4}{60}\right)^2 = 4497+\frac{3376}{3600} < 4498.$$

$$\text{Nous poursuivons les calculs ainsi : } \frac{4500-(67;4)^2}{2.(67;4)} = \left[\frac{(2;3,44).60}{2.(67;4)} \right] = \left[\frac{7424''}{134;8} \right] = \frac{55}{60^2}.$$

Et la deuxième valeur approchée obtenue est $x_2=67;04,55$.

La représentation de Théon a permis de donner une interprétation géométrique des étapes les plus importantes de ce calcul. Mais, le procédé qu'elle décrit dépend du résultat obtenu dans la première étape.

En effet, la première valeur dans l'étude de Théon est par défaut. Le cas où elle serait par excès n'a pas été envisagé.

Par exemple, pour calculer $\sqrt{55}$, nous avons $55=7^2+6$.

Selon le procédé de Théon, nous avons $\frac{6}{14} = \frac{360}{14.60}$ et $\sqrt{55} \approx 7 + \left[\frac{360}{14.60} \right] = 7;25$ qui est

une valeur approchée par excès car : $(7;25)^2 = 55;00,25$

Nous ne pouvons pas poursuivre les calculs ainsi mais nous pouvons changer l'opération de cette première étape et soustraire de la racine exacte le résultat, obtenu en divisant l'excès par le double de cette racine au lieu de la lui ajouter. On obtient, ainsi, une valeur très précise.

$$\text{Effectivement, si on pose } v_2 = \left[\frac{|A-(n+v_1)^2|}{2(n+v_1)} \right] = \frac{0;00,25}{2.7;25} = 0;00,01 \quad \text{alors}$$

$$\sqrt{55} \approx 7;25 - 0;00,01 = 7;24,59.$$

Avec $(7;24,59)^2 = 54;59,24,10,1$.

Il est possible aussi de commencer le procédé avec une valeur par défaut qu'on calcule avec la méthode de Héron.

Théon n'a donc pas signalé ce cas peut être parce qu'il ne correspond pas à celui qui est représenté dans l'exemple $\sqrt{4500} \approx 76;04,55$ qui a été proposé par Ptolémée.

Nous remarquons par contre qu'il est possible d'appliquer la méthode de Théon dans la base décimale de la manière suivante :

$$\frac{6}{14} = \left(\frac{6 \cdot 10}{14}\right) \cdot 10^{-1}, \quad \sqrt{55} \approx 7 + \left[\frac{60}{14}\right] \cdot 10^{-1} = 7,4 \quad \text{avec} \quad (7,4)^2 = 54,76 < 55.$$

Cette valeur est par défaut et est moins précise que $7;25$. Mais, en poursuivant le procédé de Théon nous pourrions l'affiner.

V- INDEX

INDEX DES NOMS PROPRES

Cet index contient tous les noms des personnes citées dans la thèse. Ceux qui sont signalés dans les notes sont indiqués par Xn, X étant le numéro de la page.

-A-

- Aballagh, M. : 37n, 80n, 87n, 101n, 102n, 103n, 104n, 107n, 109n, 110n, 114n, 274, 275n.
Abassi, A. : 8n, 23n, 24n, 25n, 36n, 41n, 46n, 48n, 49n, 50n, 51n.
ôAbd al-Ḥaqq Ibn Ṭāhir : 127, 180n.
Abdeljaouad, M. : 75n.
Abū l-Wafā (m. 998) : 6, 6n, 8, 9, 10, 11, 12, 13n, 14n, 16n, 17, 18, 19, 20, 22, 27, 27n, 28, 28n, 33, 33n, 70.
Al-ôAlī, S. A. : 6n.
Allard, A. : 8n, 25n, 28n, 34n, 40n.
Amara, M. : 30n.
Amawī (al-) Yaôîsh Ibn lbrāhīm (XIV^e s.) : 1, 9, 9n, 45, 45n, 129, 130, 131, 131n, 136, 137, 138, 139.
Archimède (m. 212 av. J. C.) : 61, 61n, 63n.

-B-

- Baghdādī (al-) (m. 1037) : 8, 8n, 10n, 27, 27n, 28, 28n, 29, 29n, 30, 31, 31n, 35, 35n, 40, 40n, 41, 41n, 42, 42n, 46, 46n, 48, 48n.
Bagheri, M. : 8n.
Barbin, E. : 70n, 282n, 287n, 289n.
Bentaleb, F. : 114n.
Berggren, J. L. : 26n, 31n, 70n.
Bīrūnī (al-) Abū ar-Rayḥān (m. 1048) : 22, 60, 60n, 61n, 62, 63, 64, 64n, 66, 66n, 67, 67n, 70n.
Borowczyk, K. J. : 53n, 59n, 70n, 282n, 287n, 289n.
Boudriga, N. : 30n.
Boyer, C. B. : 12n.

-C-

- Caveing, M. : 26n, 278n, 282n, 284n.
Chalhoub, S. : 8n, 18n.
Charbert, J-L. : 70n, 279n, 282n, 287n,

289n.

-D-

- Damirdāsh, A. S. : 8n.
Djebbar, A : 22n, 27n, 30n, 37n, 41n, 42n, 43n, 52n, 52n, 53n, 68n, 70n, 74n, 75n, 76n, 87n, 101n, 102n, 114n, 122n, 210, 282n, 289n.

-E-

- Euclide (III^e s. av. J.-C.) : 62, 82n, 117n, 118, 161n, 181n, 195n, 287, 287n.

-F-

- Folkerts, M. : 25n, 33, 34n, 35n, 40n.

-G-

- Gazenaze, M. : 8n.
Ghurbī (al-) : 3, 78n, 113n, 115, 119, 120, 120n, 125, 208, 209, 210, 210n.
Guergour, Y. : 114n.
Guillemot, M. : 47n, 51n, 70n, 282n, 287n, 289n.

-H-

- Ḥabash al-Ḥāsib (IX^e s.) : 1, 6, 60, 68.
Ḥafnāwī (al-), M. Ḥ. : 8n.
Harbili, A. : 2, 2n, 10n, 82n, 113n, 114n, 117n, 118n, 120n, 122n, 210n.
Harzallah, K. : 30n.
Ḥaṣṣār (al-) (XII^e s.) : 2, 2n, 76, 81, 87, 87n, 88, 89, 93, 94, 94n, 96, 103, 107, 122, 123, 126, 131, 141, 180n.
Heath, T. : 117n, 287n, 288n.
Héron (I^e s.) : 105, 284, 286, 287, 289.
Hogendijk, J. P. : 56n, 57n.
Horner. : 25n, 59.

-I-

- Ibn ʿAbdūn (X^e s.) : 75, 75n, 122, 122n.
 Ibn al-Bannā (m. 1321) : 2, 37n, 75, 77, 79, 80, 80n, 82n, 101, 101n, 102, 102n, 103, 103n, 104, 104n, 105, 106, 107, 107n, 108, 109n, 110, 110n, 111, 112, 113, 113n, 114, 114n, 115, 116, 117, 118, 119, 120, 121, 122, 123, 125, 127, 129, 130, 131, 137, 138, 139, 177n, 197n, 208, 269, 270, 271, 272n, 274, 275n.
 Ibn al-Faḥḥām (XIV^e s.) : 75, 75n.
 Ibn al-Hā'im (m. 1412) : 75, 75n.
 Ibn Haydūr (m. 1413) : 2, 2n, 3n, 76, 76n, 78n, 114, 115, 116, 117, 118, 119, 120, 120n, 122, 126, 127, 138, 185, 198n, 206, 209, 257n, 263n.
 Ibn Khaldūn ʿAbd ar-Raḥmān (m. 1406) : 74, 74n, 102n.
 Ibn Labbān Kushyār (m. 1024 env.) : 8, 8n, 11, 11n, 21, 30, 30n, 43, 43n.
 Ibn al-Majdī (m. 1447) : 1, 9, 9n, 37, 37n, 38, 130.
 Ibn Muʿādh al-Jiyyānī (XI^e s.) : 76.
 Ibn Munʿim (m. 1228) : 2, 77, 81, 82, 85, 86, 87, 89, 93, 94, 97, 97n, 98, 99, 100, 103, 108, 110, 112, 113, 117, 118, 123, 126, 127, 131, 134, 135, 136, 138, 148, 180n.
 Ibn Qunfudh (m. 1407) : 114n.
 Ibn as-Samḥ (m. 1035) : 76.
 Ibn Sayyid : 74n.
 Ibn Ṭāhir : 180n.
 Ibn al-Yāsamin (m. 1204) : 75n, 77, 80, 80n, 85, 85n, 94, 96, 122, 131.
 Ibn Yūnus (m. vers 1080) : 70.
 Ibn Zakariyyā al-Gharnāṭī (m. 1404) : 2, 79, 87, 87n, 115, 116, 120, 122, 123, 125, 126, 127, 128, 130, 135, 137, 163, 177n, 180n, 181n, 182n, 183n.

-J-

Jaouiche, K. : 8n.

-K-

Karpova, L. A. : 61n.

- Khwārizmī (al-) (m. 850) : 1, 6, 8, 8n, 21, 23, 25, 25n, 26, 26n, 27, 28, 28n, 29, 29n, 33, 34, 34n, 35, 35n, 40, 40n, 52, 52n, 110, 111, 208, 269, 278.
 Kāshī (al-) (m. 1429) : 1, 6, 8, 8n, 10, 10n, 11n, 21, 24, 25n, 30, 30n, 36, 36n, 40, 41, 41n, 46, 48, 49, 49n, 50, 50n, 51, 51n, 52, 53, 53n, 60, 68n, 69, 69n, 70, 70n, 71, 72.
 Karajī (al-) (m. 1029) : 8, 8n, 17, 18n, 23, 23n, 30, 30n, 40, 41n, 48.
 Kepler, J. (m. 1630) : 60.
 Kennedy, E. S : 68, 68n, 69n, 70n.
 Khayyām (al-) ʿUmar (m. 1131) : 22, 22n, 52, 52n, 53, 56n.
 Kouidri, K. : 32n.
 Krasnova, S. A. : 61n.
 Kunitzsch, P. : 25n, 33n, 34n, 35n, 40n.

-L-

- Lamrabet, D. : 2n, 82n, 94n, 132n.
 Levy, M. : 8n.
 Lorch, R. : 25n.

-M-

- Manouni (al-) [Mānūnī (al-)] : 210n.
 Martzloff, J. C. : 70n, 282n, 287n, 289n.
 Misrātī (al-) ʿAbd al-ʿAzīz (m. 1344) : 116, 116n, 130, 130n.
 Moslih, A. : 2n, 76n, 78n.
 Mursī, M. Ḥ. : 52n.
 Musharrafa, A. M. : 52n.

-N-

- Naghsh, D. : 3n.
 Nasawī (an-) (m. vers 1030) : 21, 30, 43.
 Nīshābūrī (an-) (XIV^e s.) : 8, 8n, 23, 24, 24n, 25, 25n, 36, 36n, 41, 41n, 42, 46, 47n, 48, 48n, 49, 49n, 50, 50n, 51, 51n.

-P-

- Pajus, A. M. : 70n, 282n, 285n, 287n.
 Petruck, M. : 8n.
 Ptolemée (II^e s.) : 27, 38n, 68, 288, 289.
 Pythagore (V^e s. avant J.-C.) : 66n, 282.

-Q-

Qalaṣādī (al-) (m. 1486) : 3, 18n, 77, 114n, 115, 129, 130, 134, 136, 138, 241, 257n.

Qaṭrawānī (al-) (XV^e s.) : 3, 77, 79, 129, 130, 131, 132, 132n, 133n, 134, 135, 136, 138, 219, 257n.

-R-

Rashed, R. : 19n, 22n, 23n, 30n, 36n, 37n, 41n, 42n, 46n, 47n, 48n, 49n, 50n, 51n, 52n, 53n, 56n, 59n, 83n.

Rosenfeld, B. A. : 53n, 69n, 70n.

Ruffini, P. (m. 1822) : 22, 25n, 59.

-S-

Saidan, M. S. : 8n, 9n, 11n, 13n, 14n, 19n, 29n, 45n, 131n.

Samaw'al (as-) (m. 1175) : 1, 8, 9, 11, 19, 20, 23, 24, 30, 35, 37, 37n, 41, 46, 47, 47n, 48, 49, 50, 51, 83.

Shalabī Mīrām : 70.

Smith, D. E. : 27n.

Souissi, M. : 13n, 101n, 103n, 107n, 271, 272n.

Aṣ-Ṣāghānī (X^e s.) : 76.

-T-

Ṭfayyesh (aṭ-) (XIX^e s.) : 3, 77, 115, 129, 130, 134, 138, 241, 290.

Théon (IV^e s.) : 27, 27n, 38n, 287, 288, 290.

Transus, W. R. : 68n.

Ṭūsī (aṭ-) (Naṣīr ad-dīn) (m. 1274) : 39, 41.

Ṭūsī (aṭ-) (Sharaf ad-dīn) (XII^e s.) : 1, 52, 53, 53n, 54, 56, 56n, 57n, 58, 59, 59n.

-U-

ôUqbānī (al-) (m. 1408) : 10n, 81n, 82, 82n, 90, 114n, 115, 116, 117, 118, 118n, 120, 120n, 121, 122, 122n, 125.

Uqlīdisī (al-) (X^e s.) : 8, 8n, 27, 27n, 28, 28n, 30, 30n, 32, 32n, 35, 35n, 40, 40n, 42, 46, 46n, 48, 48n.

-V-

Viète, F. (m. 1603) : 59n.

Vitrac, B. : 287n.

-W-

Woepcke : 22.

-Y-

Youschkevitch, A : 8n, 10n, 12n, 21, 22, 22n, 25n, 30n, 53n, 61n, 69n, 70n.

-Z-

Zemouli, T. : 80n, 85n.

Zoubeidi, M. 2n

VI-BIBLIOGRAPHIE GENERALE

BIBLIOGRAPHIE GENERALE

- ABALLAGH, M. : *Rafō al-ḥijāb d'Ibn al-Bannā* [Le lever du voile d'Ibn al-Bannā], Edition critique, traduction française et analyse mathématique, Thèse de Doctorat, Paris, Université de Paris I- Panthéon- Sorbonne, 1988.
- ABALLAGH, M. & DJEBBAR, A. : Découverte d'un écrit mathématique d'al-Ḥaṣṣār (XII^e s.) : le Livre I du Kāmil, *Historia Mathematica*, n° 14, (1987), pp. 147-158.
- ABASSI, A. : *Le calcul de la racine n^{ième} d'un nombre chez al-ḥasan an-nīṣabūrī (XIV^e siècle)*, Magister en histoire des mathématiques arabes, Alger, E. N. S. de Kouba, 2010.
- ABDELJAOUAD, M. : *Ibn al-Hā'im, Sharḥ al-urjūza al-yāsmīniyya* [Ibn al-Hā'im, commentaire sur le poème d'Ibn al-Yāsamīn], Tunis, Publication de l'Association Tunisienne des Sciences Mathématiques, Non daté.
- ABŪ L-WAFĀ. : *Kitāb fī mā yaḥtāju ilayhī aṣ-ṣāniō min aōmāl al-handasa* [Livre sur ce qui est nécessaire à l'artisan en constructions géométriques], Ṣaliḥ Aḥmad al-ōAlī, éd., Baghdad, maṭbaōat jāmiōat Baghdād, 1979.
- ALLARD, A. : *Muḥammad Ibn Mūsā al-Khwārizmī, Le calcul indien (Algorismus)*, Paris, Société des Etudes Classiques, Bruxelles & Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard, 1992.
- AMAWĪ (al-), Y. *Marāsim al-intisāb fī maōālim al-ḥisāb* [Les honneurs de l'affiliation sur les signes du calcul], Saidan, A. S. éd. Alep : Université d'Alep, Institut d'Histoire des Sciences Arabes, 1981.
- BAGHDĀDĪ (al-). : *at-Takmila fī l-ḥisāb al-hindī* [[Le complément dans le calcul indien], Ahmed S, Saidan, éd. Koweit, manshūrāt maōhad al-makhṭūṭāt al-ōarabiyya, 1985.
- BENTALEB, F. : *Abū l-Ḥasan al-Qalaṣādī (m.891/1486), Sharḥ Talkhīṣ aōmāl al-ḥisāb, Oeuvre mathématique en Espagne musulmane du XV^e siècle*, Edition et traduction, Dar al-Gharb al-islami, Tunis, non daté.
- BERGGREN, J. L. : *Episodes in the mathematics of medieval Islam*, New York, Springer-Verlag, 1986.
- BERGGREN, J. L. : *Some Ancient and Medieval Approximations to Irrational Numbers and Their Transmission*, In Y. Dold-Samplonius, J. W. Dauben, M. Folkerts & B. van Dalen (edit.): *From China to Paris : 2000 years transmission of mathematical ideas*, Stuttgart, Franz Steiner Verlag, 2002, pp. 31-44.
- BĪRŪNĪ (al-) Abū Rayḥān Muḥammad b. Aḥmad. : *al-Qānūn al-masōūdī (Canon Masudicus)*, Edition dāiratu l-maōārif al-ōuthmāniyya (Osmania Oriental Publication Bureau) Hyderabad-Dn. INDIA, 1954
- BOROWCZYK, J. : Preuve et complexité des algorithmes de résolution numérique d'équations polynomiales d'al-Tūsī et de Viète, *Actes du deuxième colloque maghrébin sur l'histoire des mathématiques arabes, Tunis le 1- 2- 3 décembre 1988*, Tunis, Maghreb-Edition, non daté, pp. 27-52.
- BOYER, C. B. : *A History of Mathematics*, New Jersey, Princeton University Press, 1985.
- CAVEING, M. : *La constitution du type mathématique de l'idéalité dans la pensée grecque*, Thèse de Doctorat, Paris, Université de Paris X, 1977.
- CHARBERT, J.L. & BARBIN, E. & GUILLEMOT, M. & PAJUS, A. M. & BOROWCZYK, J. & DJEBBAR, A. & MARTZLOFF, J.C. : *Histoire d'algorithmes, du caillou à la puce*, Paris, Edition Belin, 1994.
- DJEBBAR, A. & RASHED, R. : *L'œuvre algébrique d'al-Khayyām*, Alep, Université d'Alep, I. H. A. S, 1981.

- DJEBBAR, A. : Algorithmes et optimisation dans les mathématiques arabes, *Actes du 1^e Symposium International de l'ICOMICD sur Informatics and the teaching of mathematics in developing countries* (Monastir, 3-7 février 1986), M. AMARA, N. BOUDRIGA & K. HARZALLAH (edit.), Tunis 1987, pp. 185-194.
- DJEBBAR, A. : *Mathématiques et mathématiciens dans le Maghreb médiéval (IX^e - XVI^e siècles)*, *Contribution à l'étude des activités scientifiques de l'Occident musulman*, Thèse de Doctorat, Paris, Université de Nantes- Université de Paris-Sud, 1990, 850 pp.
- DJEBBAR, A. : Deux mathématiciens peu connus de l'Espagne du XI^e siècle : al-Mu'taman et Ibn Sayyid, Colloque International sur "*Les Mathématiques autour de la Méditerranée jusqu'au XVII^e siècle*" (Marseille-Luminy, 16-21 Avril 1984). In FOLKERTS, M. & HOGENDIJK, J.-P. (édit.) : *Vestigia Mathematica, Studies in medieval and early modern mathematics in honour of H. L. L. Busard*, Amsterdam-Atlanta, GA 1993, pp. 84-91.
- DJEBBAR, A. : La contribution mathématique d'al-Mu'taman et son influence hors d'al-Andalus, Colloque international sur *Huit siècles de mathématiques en Occitanie, de Gerbert et des Arabes à Fermat* (Toulouse, 10-13 Décembre 1992), J. Cassinet (édit.), Toulouse, C. I. H. S. O., 1995, pp. 35-46.
- DJEBBAR, A. : La rédaction de l'Istikmāl d'al-Mu'taman (XI^e s.) par Ibn Sartāq un mathématicien des XIII^e-XIV^e siècles", *Historia Mathematica*, n° 24, (1997), pp. 185-192.
- DJEBBAR, A. : *Contribution à l'étude des activités mathématiques dans l'Occident musulman (IX^e-XVI^e S)*, Habilitation à diriger des recherches, Paris, Ecole des Hautes Etudes en Sciences Sociales, 1998, 639 pp.
- DJEBBAR, A. : La tradition arithmétique euclidienne dans le Kitāb al-istikmāl d'al-Mu'taman et ses prolongements en Andalus et au Maghreb, *Actes du 5^e Colloque Maghrébin sur l'Histoire des Mathématiques Arabes* (Tunis, 1-3 Décembre 1994), Tunis, A. T. S. M., 1998, pp. 62-84.
- DJEBBAR, A. : *Une histoire de la science arabe*, Paris, Editions du Seuil, 2001
- DJEBBAR, A. : Ar-Risāla fī t-taksīr li Ibn ōAbdūn, shāhid ōalā al-mumārasāt as-sābiqa li t-taqlīd al-jabrī al-ōrabī [L'épître sur le mesurage d'Ibn ōAbdūn, un témoin des pratiques antérieures à la tradition algébrique arabe], *Suḥayl, Journal for the History of the Exact and Natural Sciences in Islamic Civilisation*, Barcelone, 2005, Volume 5, partie arabe, pp. 7-68.
- DJEBBAR, A. : Pratiques géométriques et géométrie savante au Maghreb : L'exemple d'Ibn Haydūr, *Actes du 9^e Colloque maghrébin sur l'histoire des mathématiques arabes* (Tipaza, 12-14 mai 2007), Alger, Imprimerie Fasciné, 2011, pp. 53-79.
- FOLKERTS, M. & KUNITZSCH, P. : *Die Altteste Lateinische Schrift Uber das Indische Rechnen Nach al-Hwārizmī*, Munchen, Verlag Bayerischen Akademie Der Wissenschaften, 1997.
- FOLKERTS, M. & LORCH, R. : The Mathematical and astronomical writings of al-Khwarizmi, *Actes du Cinquième Colloque Maghrébin sur l'Histoire des Mathématiques Arabes*, (Tunis, 1-3 Décembre 1994), Tunis, A. T. S. M. (edit.), 1998, pp. 109-119.
- GHURBĪ (al-) : *Takhṣīṣ uwlī l-albāb fī sharḥ talkhīṣ aōmāl al-ḥisāb* [Spécialisation des hommes de cœur dans le commentaire de l'abrégé des opérations du calcul], Ms. Alger, B.N, n° 2712. Ms. Rabat, B. G, n° 828D.
- GUERGOUR, Y. : *al-Aōmāl ar-riyāḍiyya li Ibn Qunfudh al-qasanṭīnī (m.1407)* [Les écrits mathématiques d'Ibn Qunfudh al-qasanṭīnī], Magister d'Histoire des Mathématiques, Alger, E. N. S. de Kouba, 1990.

- GUILLEMOT, M. : *Sur quelques algorithmes à travers un écrit d'as-Samaw'al*, Quatrième colloque maghrébin international sur l'Histoire des Mathématiques Arabes, Fès, 2-4 Décembre 1992.
- HARBILI, A. : *L'enseignement des mathématiques à Tlemcen au XIV^e siècle à travers le commentaire d'al-Ūqbānī (m.1408) au Talkhīṣ d'Ibn al-Bannās (m.1321)*, Magister d'Histoire des Mathématiques, Alger, E. N. S. de Kouba, 1997.
- HARBILI, A. : Quelques procédés d'approximation dans les écrits mathématiques maghrébins des XIIe-XIVe siècles, *Actes du 7^{ième} colloque maghrébin sur l'histoire des mathématiques arabes*, (Marrakech, 30 mai – 1^e juin, 2002), Marrakech, Imprimerie al-Wataniya, 2005, vol 1, pp. 157-199.
- HARBILI, A. : Le Takhṣīṣ d'al-Ghurbī : Un commentaire inédit du Talkhīṣ d'Ibn al-Bannā, *Actes du huitième colloque maghrébin sur l'histoire des mathématiques arabes*, (Tunis, 18-20 Décembre 2004), Tunis, Publication de l'Association Tunisienne des Sciences Mathématiques, 2006, pp. 199-216.
- ḤAṢṢĀR (al-). : *al-Kāmil fī ṣinā'at al-ʿādad* [(Le (livre) complet dans la science du nombre)], Ms. Marrakech, n° 313.
- ḤAṢṢĀR (al-). : *Kitāb al-Bayān wa t-tadhkār* [Le livre de la démonstration et de la remémoration], Ms. Rabat, B.G, n° 917Q.
- HEATH, T. : *The thirteen books of Euclid's Elements*, New York, Dover publications, Inc, 1956.
- HEATH, T. : *A History of Greek mathematics*, New York, Dover Publication Inc, 1981.
- HOGENDIJK, J. P. : Sharaf al-Dīn al-Ṭūsī on the number of positive roots of cubic equations, *Historia Mathematica*, n° 16, 1988, pp. 69-85.
- IBN HAYDŪR. : *Kitāb at-tamhīṣ fī sharḥ at-talkhīṣ*, [Le livre de la clarification sur le commentaire du Talkhīṣ], Ms. Rabat, al-Hasaniya, n° 252.
- IBN HAYDŪR. : *Tuhfat at-ṭullāb wa umniyat al-ḥussāb fī sharḥ mā ashkala min Rafʿ al-ḥijāb* [La parure des étudiants et le souhait des calculateurs sur l'explication des difficultés du Rafʿ al-ḥijāb], Ms. Vatican, n°1403
- IBN KHALDŪN. : *Al-Muqaddima* [Les Prolégomènes], Beyrouth, Dār iḥyā' at-turāth al-ʿarabī, 1999.
- IBN LABBĀN. : *Uṣūl ḥisāb al-hind* [Les fondements du calcul de l'Inde], Mohammad Bagheri, éd./trad., Téhéran, Scientific and Cultural Publications Company, 2003.
- IBN AL-MAJDĪ : *Kashf al-ḥaqā'iq fī ḥisāb ad-daraj wa d-daqā'iq* [Dévoilement des vérités dans le calcul sur les et les minutes], Ms. Alger, B. N, n° 1456.
- IBN MUNŪIM : *Fiqh al-ḥisāb* [La science du calcul], Ms. Rabat, B.G, n° 416Q.
- IBN MUNŪIM. : *Fiqh al-ḥisāb* [La science du calcul], Driss Lamrabet, éd. Rabat, Dār al-amān, 2005.
- IBN ZAKARIYYĀ. : *Ḥaṭṭ an-niqāb baʿda rafʿ al-ḥijāb ʿan wujūh aʿmāl al-ḥisāb* [Abaissement de la voilette après le lever du voile sur les formes des procédés du calcul], Ms. Tunis, B.N, n° 561.
- KARAJĪ (al-). : *al-Kāfī fī l'ḥisāb* [Le livre suffisant en calcul], Sami Chalhoub, éd. Alep, Université d'Alep, Institut d'Histoire des Sciences Arabes, 1986.
- KĀSHĪ (al-). : *Miftāḥ al-ḥisāb* [La clé du calcul], Aḥmad Saʿīd Damirdāsh & Muḥammad Ḥamdī al-Ḥafnāwī, éd. Le Caire, Dār al-kitāb al-ʿarabī, 1967.
- KENNEDY, E. S. : *Studies in the Islamic Exact Sciences*, Beirut, American University of Beirut, 1983.

- KOUIDRI, Khadidja. : *Tarīqat al-khaṭa'ayn fi at-tadlīd ar-riyyadī al-ʿarabī* [La méthode de fausse position dans la tradition mathématique arabe], Magister d'histoire des mathématiques arabes, Alger, E. N. S., 1999.
- LAMRABET, D. : *Les mathématiques maghrébines au Moyen-âge, Traduction de manuscrits inédits. Motivations pédagogiques de leur étude actuelle*, Mémoire de post-graduat en didactique des mathématiques, Bruxelles, Université libre de Bruxelles, 1981.
- LAMRABET, D. : *L'introduction à l'histoire des mathématiques maghrébines*, Rabat, Imprimerie El-maârif al-jadīda, 1994.
- MĀNŪNĪ (al-), M. : Nash'at ad-dirāsāt ar-riyādīyya fī maghrib al-ōaṣr al-wasīṭ ar-rābiō [Activités des études mathématiques dans le Maroc de la quatrième période du moyen-âge], *al-Manāhil*, Rabat, n°33, 1985, pp. 77-115.
- Al-MISRĀTĪ : *Al-Lubāb fī talkhīṣ aōmāl al-ḥiṣāb* [La moelle sur l'abrégé des opérations du calcul], Ms. Rabat, Al-Ḥasaniyya, n° 2186 / 2.
- MOSLIH, A. : *Tuḥfat aṭ-tullāb wa umniyyat al-ḥussāb fī sharḥ mā ashkala min Rafō al-ḥijāb li Ibn Haydūr at-Tādilī* [La parure des étudiants et le souhait des calculateurs sur l'explication des difficultés du Rafō al-ḥijāb d'Ibn Haydūr at-Tādilī], Thèse de Doctorat, Rabat, Université Mohammed V, 2006.
- MOSLIH, A. : Taqdīm kitāb Tuḥfat aṭ-tullāb wa umniyyat al-ḥussāb fī sharḥ mā ashkala min Raf' al-ḥijāb li Ibn Haydūr at-Tādilī [Présentation du livre « La parure des étudiants et le souhait des calculateurs sur l'explication des difficultés du 'Lever du voile' d'Ibn Haydūr at-Tādilī], *Actes du 9^e Colloque maghrébin sur l'histoire des mathématiques arabes* (Tipaza, 12-14 mai 2007), Alger, Imprimerie Fasciné, 2011, partie arabe, pp. 61-62.
- MUSHARRAFA, A. M. & MURSĪ, M. Ḥ. : *Kitāb al-jabr wa l-muqābala li Muḥammad b. Mūsā al-Khwārizmī*, Egypt, Dār al-kitāb al-ʿarabī liṭ-ṭibāʾa wa n-nashr, 1968.
- NEUGEBAUER, O. : *The Exact Sciences in Antiquity*, Second Edition, New York, Dover Publications, Inc, 1969.
- NIGHECH, J. : *at-Tamḥiṣ fī sharḥ at-Talkhīṣ d'Ibn Haydūr at-Tādilī (m.816/ 1416)*, Etude philosophique, analyse mathématique et édition critique, Thèse de Doctorat en philosophie, Rabat, Université Mohamed V, Faculté des Lettres et des sciences Humaines, 2006-2007.
- QALASĀDĪ (al-). : *Ghunyat dhawī l-albāb* [La richesse des gens intelligents], Ms. B. N d'Alger, n° 3313.
- QATRAWĀNĪ (al-). : *Rashf ar-ruḍāb min thughūr aōmāl al-ḥiṣāb* [Succion du nectar des bouches des opérations du calcul], Ms. Rabat, B.G, n° 416Q.
- RASHED, R. : *Entre arithmétique et algèbre. Recherches sur l'histoire des mathématiques arabes*, Paris, Société d'édition Les Belles Lettres, 1984.
- RASHED, R. : *Sharaf al-dīn al-Ṭūsī, Œuvres mathématiques, algèbre et géométrie au XII^e siècle*, Paris, Les Belles Lettres, 1986.
- SOUISSI, M. : *Ibn al-Bannā al-Marrākushī, Talkhīṣ aōmāl al-ḥiṣāb*, [Ibn al-Bannā de Marrakech, l'abrégé des opérations du calcul], Edition, traduction française et commentaires, Tunis, Publication de l'université de Tunis, 1969.
- SAIDAN, A, S. : *aṭ-Ṭūsī : Jawāmō al-ḥiṣāb bi t-takht wa t-turāb*, Beyrouth, Edition al-Abḥāth, vol. XX, n°2. 1967.
- SAIDAN, A, S. : *The Arithmetic of al-Uqlīdisī*, Boston, Reidel Pub., 1978.

- SAIDAN, A. S. : *Tārīkh ʿilm al-ḥisāb al-ʿarabī* [L'histoire de la science du calcul arabe],
Partie 1 : *Ḥisāb al-yad* [Calcul digital], Ammān, Jamʿiyyat ʿummāl al-maṭābiḥ at-
taʿāwuniyya, 1971.
- SMITH, D. E. : *History of mathematics*, New York, Dover Publications Inc, 1958.
- ṬFAYYASH. : *Sharḥ al-Qalaṣādī* [Commentaire (au livre) d'al-Qalaṣādī], Ms. bibliothèque
privée, banī yazguen, Ghārdāya, Algérie, sans numéro.
- TOOMER, G. J. : Al-Khwārizmī. In Ch. Gillespie (éd.), *Dictionary of Scientific Biography*,
New York, Scribner's Sons, 1981, vol 7, pp. 358-365.
- UQLĪDISĪ (al-). : *al-Fuṣūl fī l-ḥisāb al-hindī* [[Les sections sur le calcul indien], Ahmed S.
Saidan, éd. Alep, Université d'Alep, Institut d'Histoire des Sciences Arabes, 1985.
- VAN DER WAERDEN, B. L. : *Geometry and Algebra in Ancient Civilization*, Springer-
Verlag, 1983.
- VITRAC, B. : *Euclide, Les Eléments*, Paris, Presses Universitaires de France, 1990.
- YOUSCHKEVITCH, A. P. : *Les mathématiques arabes (VIIIe-XVe siècles)*, Traduction par
M. Cazenaze et K. Jaouiche, Paris, Librairie Philosophique, J.Vrin, 1976.
- YOUSCHKEVITCH, A. P. & ROSENFELD, B. A. : Al-Kāshī. In Ch. Gillespie (éd.)
Dictionary of Scientific Biography, New York, Scribner's Sons, 1981, vol 7, pp. 255-262.
- ZEMOULI, T. : *Al-Aḥmāl ar-riyyāḍiyya li Ibn al-Yāsamīn (m.1204)* [L'œuvre mathématique
d'Ibn al-Yāsamīn], Magister d'Histoire des Mathématiques, Alger, E. N. S. de Kouba,
1993.