بعض أنواع الحساب في التقليد الرياضي العربي (القرن 9م-القرن15م)

Some calculation types of traditional Arabic mathematics (9th-15th centuries)

د. أنيسة حربيلي

مخبر تاريخ الرياضيات لمدرسة العليا للأساتذة –القبة (الجزائر) ،

anissa.harbili@g.ens-kouba.dz

تاريخ الاستلام:2020/02/04 تاريخ القبول:2021/06/02

الملخص:

الحساب هو نشاط رياضياتي قديم لا يمكن تحديد الفترة الزمنية التي ظهر فيها لأول مرة لأن ممارسة الانسان له قد ترجع إلى مرحلة بعيدة جدا في تاريخ البشرية. وحسب الدراسات المتخصصة فإن الحساب العربي قد تأثرا كثيرا ببعض مظاهر النشاطات الرياضياتية التي عرفتها الحضارات القديمة وبالخصوص البابلية والمصرية القديمة واليونانية. بل ويمكن اعتباره كامتداد لمضمون النصوص القديمة التي تنسب إلى هذه الحضارات الثلاث.

سنتطرق في الجزء الأول من هذه الدراسة إلى أنظمة العد المستعملة في النصوص البابلية والمصرية واليونانية التي عُثر عليها لحد الآن. كما سنذكر بعض الخوارزميات الحسابية التي عُرضت في هذه النصوص. بعد ذلك سنقدم أنماط الحساب العربي من خلال بعض المؤلفات التي نشرت في الشرق والغرب الاسلاميين في الفترة الممتدة من القرن 10م إلى القرن 15م. سنتطرق إلى بعض خصوصيات هذا الحساب وسنعرض خوارزميتين حسابيتين كنموذج لإظهار مدى تطور هذا الميدان من الرياضيات في الحضارة العربية.

الكلمات المفتاحية: الحساب-خوارزميات-نظام وضعي--نظام غير وضعي-الشرق والغرب الاسلاميين.

Abstract:

Computation is an old mathematical activity. We cannot situate the period where it became to be known for the first time, because human been started dealing with it in a very old step of human history. Specialized studies mention that those Arabic computational activities owe much to the appearing of some mathematical activities that were known in old civilizations in: Mesopotamia, old Egyptian and Greek civilizations. Even more it is to be an extension of the content of texts related to these three civilizations.

In the first part of this study, we will deal with numeration systems used in Babylonian, Egyptian and Greek texts. We also, review computational algorithms introduced in those texts. We than, get to the Arabic calculation throw some works edited in the East and West Islamic regions, between 10th and 15th centuries. We will mention some particularities of this calculation and will present the case of two calculating algorithms to show how this mathematical field was developed in the Arabic Civilization.

Keywords: Calculation; Algorithms; Eastern Islamic and Western Islamic; positional systems; non-positional systems.

مقدمة:

الحساب هو نشاط رياضياتي قديم قد ترجع فترة ظهوره إلى مراحل بعيدة جدا من تاريخ البشرية. والحساب العربي هو الاسم الذي سنطلقه في هذا المقال على كل أنواع الممارسات الحسابية التي عرفتها شعوب المجتمعات الاسلامية في الفترة الممتدة من القرن 8م إلى القرن 15م. استُعمل هذا النشاط الرياضياتي في مختلف التخصصات المتصلة بالرياضيات كالجبر وعلم الفلك والموسيقى وقسمة المواريث وغيرها. كان علماء الحضارة العربية يقدمونه كعلم تطبيقي كثير الاستعمال في حل مسائل عديدة ومتشعبة من الحياة الاجتماعية واليومية للأشخاص. ومن هذا المنطلق أولت له كتب التراجم والبيبليوغرافيا عناية خاصة، فعَرفته بشكل دقيق وأشارت إلى تفرعاته كما ذكرت أسماء الرياضياتين الذين ألفوا كتبا ذات أهمية كبرى في هذا الميدان بالرغم من أنهم نبغوا في علوم أخرى كالهندسة والجبر والفلك بعض هذه المؤلفات لقيت صدى واسعا في الأوساط العلمية للمجتمعات الاسلامية ابتداءَ من القرن 9م وكذلك خارج البلدان الاسلامية في الدول المسيحية المجاورة ابتداءَ من القرن 12م .

إن الدراسات التي أنجزت حول مجموعة من النصوص العربية التي تم العثور عليها إلى حد الآن والتي تتناول الحساب من جانبه النظري، تثبت أن التقليد العربي الخاص بهذا النشاط الرياضياتي يحتوي على مفاهيم قديمة سبق تداولها واستعمالها في المجتمع العربي قبل مجيء الاسلام. وأنه اقتبس مجموعة من المفاهيم من الكتب التي ألفت في

المناطق التي عرفت حضارات عريقة مثل الهند وبعض البلدان الأخرى التي كانت تحت الهيمنة اليونانية في الفترة الهلنستية. في البداية كان دور هذا النشاط هو المحافظة على كل ما كان موجودا ومتداولا في المجتمعات الاسلامية من ممارسات حسابية وخوارزميات. وبعدها جاءت مرحلة إثراء هذا التراث العلمي عبر دراسة ومناقشة مواضيع جديدة كان من نتائجها وضع تقنيات حسابية وخوارزميات لم تكن معروفة من قبل.

قبل استعراض أهم ما يميز الحساب العربي، سنقدم نظرة وجيزة حول أنظمة العد وطريقة الترقيم اللذان استعملا في الحضارات القديمة التي كان لها تأثيرا مباشرا أو غير مباشر على الانتاج العلمي العربي.

أنظمة العد والترقيم في بعض الحضارات القديمة

حضارة بلاد الر افدين

استعمل البابليون نظام عد عشري ستيني مختلط ووضعي، وكتبوا الأعداد بواسطة رمزين اثنين:

الرمز الأول: واستعمل لكتابة الوحدات. الواحد يكتب هكذا: 𒁹 . وبتكرار هذا الرمز مرتين نكون قد مثلنا العدد الإثنين وبتكراره إلى غاية تسع مرات نكون كتبنا الأعداد من ثلاثة إلى تسعة.

الرمز الثاني: واستعمل لكتابة العشرات. العشرة تكتب هكذا: 𒌋 . بتكرار هذا الرمز مرتين نكون كتبنا العدد عشرين وبتكراره إلى حد خمس مرات نكتب العشرات الموالية إلى غاية خمسين.

بهذه الطريقة يمكن كتابة كل عدد طبيعي باستعمال الرمزين السابقين يكفي فقط كتابة هذا العدد في النظام الستيني. مثلا العدد التالي:

$$N = 5047951 = 23.60^3 + 22.60^2 + 12.60 + 31$$

نكتبه كما يلي: 𒌋𒌋𒁹𒁹𒁹 𒌋𒌋 𒌋𒌋𒁹𒁹 𒌋𒌋𒁹𒁹𒁹

لا يوجد في الترميز البابلي كتابة تحدد المرتبة الخالية. ولهذا فقد تتعذر القراءة الصحيحة للأعداد، فمثلا قد يعبر على الواحد أو 60 أو 3600 أو أكثر. من أجل هذا يصعب التعرف على قيمة عدد مكتوب بالترميز البابلي ما لم نرجع إلى النص الذي ذُكر فيه (Proust, C., 2004).

الكسور:

أنواع الكسور التي استعملت في النصوص البابلية التي درست لحد الآن هي عبارة عن أجزاء من الوحدة الستينية. وقد كتب البابليون قيمة كل جزء بواسطة الرمزين السابقين الذين استعملا لكتابة الأعداد الصحيحة. فمثلا ثلث هو عشرون جزءا من ستين أو هو عشرون دقيقة، نكتبه بالترميز البابلي كما يلي . وفيما يتعلق بكتابة الكسر نفسه، أي بغض النظر عن قيمته العددية، فإنه توجد في بعض الوثائق التي يرجع تاريخها إلى مراحل متقدمة من تاريخ حضارة بلاد الرافدين رموزا خاصة ببعض الأجزاء. فمثلا النصف والثلث والثلثين مُثلت على التوالي كما يلي: ، ، (Proust, C., 2004, 59).

العمليات الحسابية:

استعمل البابليون العمليات الحسابية الأربعة الأساسية وهي: الجمع، الطرح، الضرب والقسمة. كما قاموا بحساب الجذور التربيعية والتكعيبية. لكن النصوص التي عُثر عليها إلى حد الآن لا تحدد الخوارزميات المتبعة لإجراء كل واحدة من هذه العمليات. هذا ونشير إلى وجود دراسات حديثة قدمت تحليلات جديدة لنصوص بابلية تسمح بالتعرف على الأدوات التي استعملت في إجراء عمليتي الضرب والقسمة (Chabert, J.L. & Barbin, E. & Guillemot, M. & Pajus, A. M. & Borowczyk, J. & Djebbar, A. & Martzloff, J.C.,1999, 7-14).

الحضارة المصرية القديمة

استعمل المصريون نظاما عشريا وغير وضعي. وعبروا على المراتب السبعة الأولى من مراتب الأعداد برموز خاصة توضحها الصورة التالية:

يمكننا كتابة هذه الرموز بأشكال مبسطة كالتالي:

الآحاد: 𓏺 𓏺𓏺 𓏺𓏺𓏺 ... (وهي على التوالي 1، 2، 3...)

العشرات: 𓎆 𓎆𓎆 𓎆𓎆𓎆 ... (وهي على التوالي 10، 20، 30)

المئات: 𓍢 𓍢𓍢 𓍢𓍢𓍢 (وهي على التوالي 100، 200، 300)

الآلاف (تمثل صورة زهرة اللوتس): 𓆼 𓆼𓆼 𓆼𓆼𓆼 ...

وتكتب عشرات الألف على شكل صورة أصبع يد الانسان. ومئات الألف على شكل صورة ضفدع. والمليون على شكل انسان واقع على ركبتيه ورافع يديه إلى السماء كما وضحته الصورة السابقة.

مثال: إذا أردنا كتابة العدد 129546 بالترميز المصري نكتبه أولا كما يلي: 129545

100000+20000+9000+500+40+5 =

ثم نستعمل الترميز السابق لتعيين كل مرتبة فنحصل على:

الكسور:

الكسور التي استعملت في النصوص المصرية هي الأجزاء التي نعبر عليها حاليا بـ: $\frac{1}{n}$, $n \geq 2$. واستعمل المصريون أيضا الثلثين والثلاثة أرباع.

الرمز الذي يعبر على مفهوم الجزء هو الذي يمثل صورة فم نصف مفتوح. وتكتب الأجزاء التي مقامها أكبر من 3 بوضع المقام تحت هذه الدائرة. وهذه بعض الأمثلة:

الثلث: ، العشر: ، جزء من واحد وعشرين جزءا: ... وهكذا

أما بالنسبة للنصف والثلثين والثلاثة أرباع فقد تمت كتابتها كما يلي:

النصف: ، الثلثين: ، ثلاثة أرباع:

العمليات الحسابية:

استعمل المصريون القدماء العمليات الحسابية الأربعة الأساسية وهي: الجمع، الطرح، الضرب والقسمة كما قاموا بحساب الجذور التربيعية. ويمكن ملاحظة مدى تطور الحساب المصري من خلال عمليتي الضرب والقسمة التي استُعمل فيهما مفهومي التضعيف والتنصيف (Chabert, J.L. & Barbin, E. & Guillemot, M. & Pajus, A. M. & Borowczyk, J. & Djebbar, A. & Martzloff, J.C., 1999, 15-20) كما توضحه الأمثلة التالية:

مثال 1: 24×36 = 864 والخوارزمية المستعملة هي:

24	1
48	2
96	4
192	8
384	16
768	32
864	36

$$864=96+768$$
$$=24.4+24.32$$
$$=24.(4+32)$$
$$=24.36$$

نتأكد من صحة الخوارزمية كما يلي:

تعتمد خوارزمية الضرب على حساب مضاعفات أحد العددين المضروبين. ولهذا فإنه من الممكن تعميمها كما يلي:

$$A \times B = \sum_{i=0}^{i=n} (\propto_i . 2^i \times A) \quad \text{حيث} \quad \propto_i = \begin{cases} 1 \\ \text{أو} \\ 0 \end{cases} \quad \text{و} \quad B = \sum_{i=0}^{i=n} \propto_i . 2^i$$

مثال 2: نريد أن نقسم 22 على 9

الخوارزمية تستعمل مضاعفات العدد 9 وأجزاءه:

9	1
18	2
3	1|3
1	1|9
22	2+1|3 +1|9

. ومنه فإن حاصل القسمة هو 1/9 + 1/3 + 2 لأن:

$$22=18+3+1$$
$$=2.9+(1|3).9+(1|9).9$$
$$=9.(2+1|3 +1|9)$$

تفكيك الكسور: هي من بين العمليات الحسابية التي كانت تجرى على الكسور. الهدف منها هو كتابة كسر بسطه يساوي 2 على شكل مجموع عدد منته من الأجزاء. هذه المسألة تعبر على عملية تحويل كسر إلى مجموع منته من الأجزاء كما توضحه الكتابة المعاصرة التالية: $\frac{2}{b} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{c_i}\right) , c_i \in \mathbb{N}$

حيث $b>4$ و c_i مختلفة مثنى مثنى. لا تعطي النصوص المصرية تفسيرا لمختلف التفكيكات المذكورة في الوثائق التي درست لحد الآن كما لا تشير إلى الخوارزميات التي استعملت لإيجادها.

الحضارة اليونانية

استعمل اليونانيون نظامين لكتابة الأعداد: أحدهما عشري وغير وضعي والآخر ستيني. وكلاهما أبجديا أي أن الرموز مأخوذة من الحروف الأبجدية للغة اليونانية التي كان يصل عددها 24 حرفا.

النظام العشري:

استعمل اليونانيون عدة طرق لكتابة الأعداد أهمها النوعين التاليين:

النوع الأول: ويسمى النظام الأثيني وهو التالي:

1	I	5	Γ (penta)
2	II	10	Δ (déka)
3	III	100	H (hekaton)
4	IIII	1000	X (chiolio)
		10000	M (Myriade)

تكتب الأعداد بالاعتماد على عملية الجمع. فمثلا ΓII =7 لأن 7= 5 + 2

ولكتابة الأعداد الكبيرة تُستعمل الرموز:Γ، 𐅄 ، 𐅃 ، 𐅂 ، 𐅁-التي تمثل الأعداد 5، 50، 500، 5000، 50000- فمثلا نكتب العدد 3777 كما يلي: 𐅁𐅂𐅃𐅄ΔΔΓII لأن:

(2+5)+(10+10+10×5)+(100+100+100×5)+1000+1000+1000𐅁=3777

النوع الثاني:

وهو النظام الأيوني. استعمل اليونانيون فيه أحرفا أبجدية مكبرة لكتابة الآحاد – من 1 إلى 9- و العشرات –من 10 إلى 90- والمئات –من 100 إلى 900. وأخذوا من الحروف الفينيقية Wāw –التي تقرأ باليونانية Digamma- لكتابة العدد 6 وQōp -التي تقرأ باليونانية Koppa- لكتابة العدد 90 وṢādē -التي تقرأ باليونانية Sampi- لكتابة العدد 900. ثم استبدلوا الأحرف المكبرة بالأحرف المصغرة وكتبوا الآلاف بنفس الرموز التي وضعوها للآحاد مع إضافة إشارة ' أعلى أو أسفل يسار كل رمز. في الجداول التالية نقدم هذه الرموز ونشرح كيفية كتابة الأعداد في هذا النظام الجديد:

الآحاد				العشرات		
α	1	Alpha		ι	10	Iota
β	2	Bêta		κ	20	Kappa
γ	3	Gamma		λ	30	Lambda
δ		Delta		μ		Mu
ε	4	Epsilon		ν	40	Nu
ϛ	5	Digamma		ξ	50	Ksi
ζ	6	Zêta		ο	60	Omicron
η	7	Eta		π	70	Pi
θ	8	Thêta		ϙ	80	koppa
	9				90	

المئات				الآلاف	
ρ	100	Rhô		′α	1000
σ	200	Sigma		′β	2000
τ	300	Tau		′γ	3000
υ		Upsilon		′δ	
φ	400	Phi		′ε	4000
χ	500	Khi		′ϛ	5000
ψ	600	Psi		′ζ	6000
ω	700	Oméga		′η	7000
ϡ	800	San		′θ	8000
	900				9000

الأعداد التي من رتبة عشرات الألف أو أكثر تكتب كما يلي:

1- لكتابة آحاد عشرات الألف، يتم وضع رمز الآحاد على يسار الحرف M أو فوقه. مثلا نكتب 20000 كما يلي βM.

2- الأعداد المركبة من عشرات الألف ومن الآلاف والمئات والعشرات والآحاد يتم كتابتها بوضع آحاد عشرات الألف على يسار الحرف M والعدد الأقل من آلاف ومئات وعشرات وآحاد على يمينه.

3- آحاد رتبة 10^8 يتم كتابتها يسارا بعد الحرف M الذي يُكتب مرتين. وكلما ارتفعت الرتبة بأربعة رتب تكرر كتابة الحرف M.

4- تم الاصطلاح على وضع خط على العدد بعد كتابته وذلك لتمييزه داخل النص. مثلا نكتب العدد 8622112 كما يلي: $\overline{\omega\xi\beta M'\beta\rho\iota\beta}$

الكسور:

الكسور التي استعملت في النصوص اليونانية هي الجزء والأجزاء. -أي الكسور التي نكتبها حاليا من الشكل $\{0, 1\}/\mathbb{N} \in n,\ n < m,\ \frac{m}{n}$-

وفيما يخص الترميز المستعمل لكتابة الجزء فقد تم وضع إشارة ' على يمين مقام الكسر. مثلا: $\frac{1}{3} \equiv \gamma'$ ، $\frac{1}{8} \equiv \eta'$. هذا الترميز ليس دقيقا بالنسبة للكسور التي يكون مقامها أكبر من 10، فمثلا $\varepsilon\kappa'$ يقبل قراءتين: الأولى: $\varepsilon\kappa' = \frac{1}{25}$ والثانية: $\varepsilon\kappa' = 20 + \frac{1}{5}$. بالنسبة للنصف فقد تمت كتابته بواسطة رمزين هما: "L أو ν'. وفي بعض الوثائق التي يرجع تاريخها إلى القرن الثالث أو الرابع للميلاد يوجد ترميزا أخر يخص الكسور التي يكون بسطها أكبر من الواحد. فمثلا الكسر $\frac{19}{24}$ كُتب على الشكل . (Dahan-Dalmedico, A. & Peiffer, J., 1986, 16-19)

النظام الستيني:

استعمل اليونانيون هذا النظام في ميدان الفلك وكتبوا الأعداد والكسور الستينية بالترميز الأبجدي السابق.

الحساب في التقليد الرياضي العربي

عرف التقليد الرياضي العربي نظامين للعد: عشري وستيني. سنقدم فيما يأتي مميزات النظامين والترقيم الخاص بكل واحد منهما.

النظام الستيني

يُسمى هذا النوع من الحساب "حساب المنجمين" لأنه كان يُستعمل في الفلك. أما الرموز التي يتم من خلالها كتابة الأعداد فهي حروف الأبجد العربية. هذا النظام وضعي وكل مرتبة فيه تحتوي على آحاد وعشرات. الآحاد تتغير في المجموعة. والعشرات تأخذ قيمها من المجموعة $\{10, 20, 30, 40, 50\}$. الخمسة عشر حرفا التي استعملت لكتابة الأعداد في هذا النظام (أحمد سليم سعيدان، 1997، 444-445) هي:

ا	ب	ج	د	ه	و	ز	ح	ط
1	2	3	4	5	6	7	8	9

ي	ك	ل	م	ن
10	20	30	40	50

قواعد كتابة الأعداد الطبيعية والكسور:

1- في كل مرتبة نكتب العشرات أولا ثم الآحاد. مثلا 26 نكتبه "كو".

2- عند قراءة عدد أو كسر لابد من النطق باسم المرتبة الأخيرة حتى يتمكن السامع استنتاج المراتب الأخرى. مثلا حين نقول "يا كو ند ثالثة" نفهم من ذلك أن ند = 54 ثالثة. ونستنتج أن كو=26 ثانية يا = 11 دقيقة. أي أن العدد هو:

$$N = 11 \times 60^{-1} + 26 \times 60^{-2} + 54 \times 60^{-3}$$

نضع صفرا في المرتبة الخالية لإثبات خلوها من العدد.

الخوارزميات التي استعملت لإجراء العمليات الأساسية من جمع وطرح وضرب وقسمة وتجذير، مستمدة من الخوارزميات المعروفة في الحساب الهندي وحساب اليد أو الحساب الذهني.

النظام العشري

وينقسم إلى نوعين: عشري وضعي وعشري غير وضعي.

النظام العشري الغير وضعي:

وهو بدوره يتفرع إلى النوع الذي يسميه الرياضياتيون العرب "حساب الجُمَّل" والنوع الذي يسمونه بـ"الحساب الرومي".

النوع الأول: وهو نظام عشري أبجدي. الرموز المستعملة لكتابة الأعداد هي حروف الأبجد العربية التي نقدمها ونحدد قيمها العددية كما يلي:

ا	ب	ج	د	ه	و	ز	ح	ط
1	2	3	4	5	6	7	8	9

ي	ك	ل	م	ن	س	ع	ف	ص
10	20	30	40	50	60	70	80	90

ق	ر	ش	ت	ض	خ	ذ	ض	ظ
100	200	300	400	500	600	700	800	900

غ
1000

نشير إلى أنه في الغرب الاسلامي (إفريقية والمغرب الأوسط والمغرب الأدنى والأندلس) تم استعمال نفس الحروف ولكن بترتيب آخر. الجدول التالي يبين وجه الاختلاف في الترقيم بين الشرق والغرب الاسلاميين:

العدد	60	90	300	800	900	1000
في الشرق الاسلامي	س	ص	ش	ض	ظ	غ
في الغرب الاسلامي	ص	ض	س	ظ	غ	ش

ولكتابة الأعداد تم الاصطلاح على ما يلي:

1-الحرف الذي تكون قيمته العددية أكبر هو الذي يتم وضعه الأول يمينا. فمثلا إذا أردنا كتابة العدد 477 نضع الحروف التي تعبر على القيم الجزئية ز(7) وع(70) وت(400) على الترتيب التالي: تعز.

2-الحروف التي تكتب يمين الحرف غ (ش في الغرب الاسلامي) تُضرب قيمتها العددية في الألف. مثلا بغ = 2000، بغغ = 2000000.

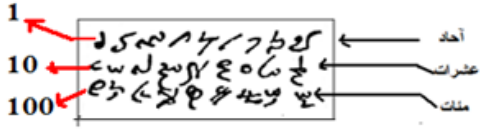
وفيما يخص الكسور والعمليات الحسابية فقد تم إدراجها وشرحها في إطار نوع آخر من الحساب العربي يسمى حساب اليد.

حساب اليد: وهو نوع خاص من النظام العشري السابق. يستعمل أصابع اليد لتمثيل الأعداد الصحيحة والكسور كما يعتمد بشكل كبير على الذاكرة عند اجراء العمليات الحسابية من جمع وطرح وضرب وقسمة وتجذير. وربما لهذا السبب سمي أيضا بـ 'الحساب الأصبعي' أو 'حساب العقود' أو 'الحساب الهوائي'. أما نتائج العمليات الحسابية فيتم تلفظها بحروف الأبجد المذكورة سابقا ويتم كتابتها وتدوينها بواسطة هذه الحروف أيضا.

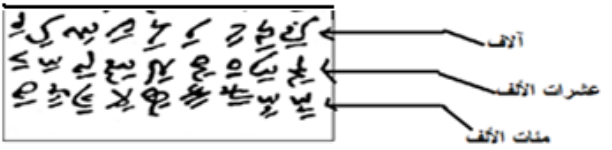
النوع الثاني: وهو الذي يسمى بـ"الحساب الرومي" وهو يختلف عن حساب الروم الذي ذكره الأقليدسي (القرن 10م) في كتابه الفصول في الحساب الهندي وقال عنه بأنه ينحدر من حساب أهل الروم (أحمد جبار& يوسف ڤرڤور، 2013، 7-52). الحساب الرومي يشبه كثيرا حساب الجُمَّل غير أنه لا يستعمل حروف اللغة العربية في كتابة الأعداد. عدد رموزه 27، تسعة منها مخصصة لكتابة الآحاد وتسعة أخرى لكتابة العشرات وتسعة أخيرة لكتابة المئات. سميت هذه الرموز بحروف الزمام أو القلم الفاسي (أحمد جبار& يوسف ڤرڤور،2013). التسعة رموز الأولى هي:

1	2	3	4	5	6	7	8	9

الجدول التالي يظهر رموز الآحاد والعشرات والمئات معا:



لترميز الآلاف نضع سطرا تحت رموز الآحاد. وبالنسبة لعشرات الألف نضع سطرا تحت رموز العشرات. ولكتابة مئات الألف نضع سطرا تحت رموز المئات كما توضحه الصورة التالية:

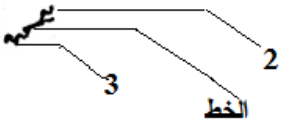


وبعد ذلك كلما أردنا معرفة رمز مرتبة أكبر كتبنا رمز المرتبة التي قبلها ووضعنا تحته سطرا. فمثلا إذا أردنا كتابة 9000000 وضعناه هكذا . أما بالنسبة لكتابة الأعداد باستعمال هذا الترميز فإنه على عكس الترقيم الأبجدي نبدأ دائما بكتابة الآحاد في أقصى اليمين ثم العشرات بعدها يسارا ثم المئات... وهكذا إلى أكبر رتبة. مثلا نكتب 894 هكذا.

الكسور:

مفهوم الكسر الذي استعمل في هذا النوع من الحساب هو مفهوم الجزء أو الأجزاء التي يمكن كتابتها بالترميز الحالي هكذا: $\frac{m}{n},\ m < n,$ أو $\frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}/\{0,1\}$ $n \in \mathbb{N}/\{0,1\}$.

أما الترميز الذي استعمل لكتابة هذه الكسور فهو يشبه كثيرا الترميز الحالي. أي أنه يتم كتابة البسط وتحته المقام ثم يفصل بينهما بخط يسمى "كرسي"(أحمد جبار& يوسف ڤرڤور،2013). فمثلا الثلثين تكتب كما يلي:



العمليات الحسابية:

الخوارزميات الحسابية التي كانت تستعمل في الجمع والطرح والضرب والقسمة تعتمد كثيرا على الحساب الذهني وتستعمل بعض القواعد المعروفة في الحساب الهندي (أحمد جبار& يوسف ڤرڤور، 2013، 7-52.

النظام العشري الوضعي:

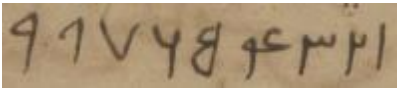
وهو الذي يُعرف في التقليد الرياضي العربي بالحساب الهندي. حسب الدراسات التي أنجزت لحد الآن فإن أقدم كتاب أُلف حول هذا النوع من الحساب هو لمحمد بن موسى الخوارزمي (ت. 850) صاحب أول كتاب أُلف في الجبر. لم يعثر على أية نسخة من هذا التأليف إلى حد الآن ولكن توجد نصوصا لاتينية يعود تاريخها إلى القرن 12م تقدم محتواه الرياضي بشكل دقيق (Allard, A., 1992, I-XXXV). بعد الخوارزمي أُلفت عدة كتب حول الحساب الهندي ومن أقدمها كتاب **الفصول في الحساب الهندي** لأبي الحسن أحمد بن ابراهيم الأقليدسي. أشار أحمد سليم سعيدان في مقدمة تحقيقه لهذا النص إلى أن الكتاب أُلف في دمشق سنة 952م. كما قدم بعض المعلومات حول بداية ظهور الحساب الهندي في التقليد الرياضي العربي. وعلاقة هذا النوع من الحساب بالطرق والوسائل الحسابية التي كان الهنود يستعملونها لحل مسائل فلكية وغيرها (الأقليدسي، 1984). بعد ذلك نشر سعيدان تحقيقا لكتاب آخر في الحساب عنوانه **التكملة في الحساب** لعبد القاهر بن طاهر البغدادي (ت. 1037م) (ابن الطاهر البغدادي، 1985) الذي أُلف في فترة ليست بعيدة عن الفترة التي عاش خلالها الأقليدسي. وقبل ذلك نشر كتابا آخر حول الحساب الهندي لا يقل أهمية لكنه أُلف في فترة بعيدة عن الخوارزمي عنوانه **كتاب جوامع الحساب بالتخت والتراب** لنصير الدين الطوسي (ت. 1274) (نصير الدين الطوسي، 1967). أما في الغرب الاسلامي فإن أقدم الكتب التي تتناول الحساب الهندي والتي عُثر عليها إلى حد الآن تعود فترة تأليفها إلى القرن 12م وهي: كتابين للحصار (القرن 12م) عنوانهما على التوالي كتاب **البيان والتذكار** (الحصار، مخ. الرباط، Q917) وكتاب **صناعة العدد** (الحصار، مخ. مراكش، 313). وكتاب ابن الياسمين (ت. 1204م) عنوانه **تلقيح الأفكار في العمل برشوم الغبار** (ابن الياسمين، 1993) وكتاب لابن منعم (ت. 1228) عنوانه **فقه الحساب** (ابن منعم، 2006).

سمي الحساب الهندي في الشرق الاسلامي بـ "الحساب على التخت والتراب" وسمي في الغرب الاسلامي بـ"حساب الغبار" أو "الحساب الغباري". انتقل هذا النوع من الحساب إلى أوروبا عبر ترجمات لاتينية أنجزت في القرن 12م (Allard, A., 1992, II).

يعتمد هذا الحساب على نظام عشري وضعي ويستخدم 10 رموز لكتابة الأعداد. تختلف الرموز التي استعملت في الشرق عن تلك التي استعملت في الغرب الاسلاميين.

الترميز المستعمل لكتابة الأعداد

الأرقام التي استعملت في الشرق الاسلامي هي كما توضحها الصورة التالية (مخ. مفاتيح الحساب، 29و):

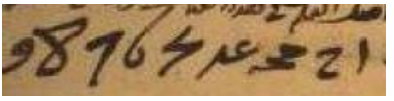


للإشارة فإن الأرقام المستعملة حاليا في المشرق العربي -١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧ ٨ ٩- تنحدر مباشرة من هذا الترميز.

الرمز العاشر الذي يسمى "الصفر" استُعمل للدلالة على المرتبة الخالية من العدد وأيضا لكتابة المراتب العليا مثل العشرة، المائة، الألف، عشرات الألف .... وهكذا. وقد وضح الاقليدسي صورة هذا الرمز بقوله...(و) جُعل في المرتبة التي تخلو دائرة وهي التي يسميها أهل هذه الصناعة صفرا..." (الاقليدسي،1984، 35).

باستعمال الرموز العشرة يمكن كتابة أي عدد مهما كان كبيرا أو صغيرا. كما يمكن التلفظ باسمه وفق الأسماء التي أطلقت على المراتب الثلاثة التي تلي الآحاد وهي العشرات، المئات والآلاف. فمثلا ٦٠٤٩٧ نلفظ بها هكذا: "ستون ألفا وأربع مائة وسبعة وتسعين" أو "سبعة وتسعين وأربع مائة وستون ألفا.

أما الرموز التي استعملت في الغرب الاسلامي فيطلق عليها اسم "حروف الغبار" أو "رسوم (رشوم) الغبار" وهي كما توضحها الصورة التالية (مخ. مكتبة بنسلفانيا، رقم293 LJS):



الكسور:

الكسور التي استعملت في التقليد الرياضي العربي هي الأجزاء التي من الشكل $\frac{1}{n}$ حيث $n \geq 2$ أو من الشكل: $n \geq 2$ و $m \leq n$, $\frac{m}{n}$

يوجد نوعين من الترميز: ففي الشرق الاسلامي كتب الرياضياتيون المقام تحت البسط بدون خط الكسر. وكتبوا الكسور المركبة من أعداد صحيحة ومن أجزاء والكسور المركبة من كسور أخرى باستعمال نفس الترميز مع بعض الاضافات (ابن الطاهر، 1985، 102-103):

٣

فمثلا: النصف كُتب هكذا: . ثلاثة ونصف كُتب هكذا: ١

٢

.

١

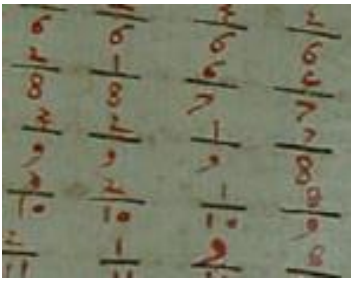
٤

ربع ثلاثة أسباع كُتب كما يلي:

٣

٧

أما في الغرب الاسلامي فقد تمت كتابة الأجزاء بنفس الترميز المستعمل اليوم أي بوضع المقام تحت البسط مع رسم خط يفصلهما. وهذه بعض النماذج (مخ. الجزائر، 71ظ-79ظ):



ثم باستعمال خط الكسر تمكن رياضياتيو الغرب الاسلامي من كتابة أنواعا أخرى من الكسور تم تعريفها والعمل بها في حل مسائل متنوعة من ميادين مختلفة مثل قسمة المواريث

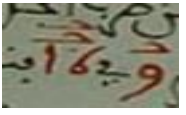
الجذور:

الأعداد الجذرية أو الجذور هي الأعداد الصماء التي من الشكل ... $\sqrt{\sqrt{a}}$, $\sqrt{a}$ حيث a عدد صحيح أو كسر ولكن ليس مربعا تاما. درس أوقليدس هذا النوع من الأعداد في الجزء العاشر من كتابه **الأصول** وعرفها وعبَّر عليها كمقادير هندسية (Heath, T. L., 10-255). أما في كتب الحساب التي نشرت في الغرب الاسلامي خلال الفترة الممتدة من القرن 12م إلى القرن 15م فقد تم تخصيص فصل فيها لدراسة المفاهيم المتصلة بهذه الأعداد والتطرق إلى الحساب التقريبي وإلى العمليات الحسابية (جمع، طرح، ضرب، قسمة وتجذير) على هذه الأعداد. واصطلح رياضياتيو الغرب الاسلامي على ترميز خاص لكتابة جذر عدد صحيح أو جذر كسر وذلك بوضع الحرف الأول من كلمة "جذر" وهو الجيم فوق العدد صحيح أو الكسر. وكلما تكررت عملية التجذير على العدد المجذور تكرر رسم حرف الجيم فوق الجيم الأول. بهذه الطريقة تم الترميز للأعداد الجذرية أو الجذور كما توضحه الصور التالية (مخ. الجزائر، 108ظ-115ظ):

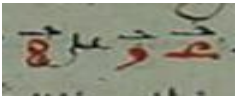
جذر 8: ، جذر نصف: ، جذر واحد ونصف ، جذر جذر نصف:

العمليات الحسابية :

تطرقت النصوص العربية إلى العمليات الحسابية من جمع وطرح وضرب وقسمة وتجذير على الأعداد الصحيحة والكسور. كما عُرضت فيها خوارزميات عمليتي التضعيف والتنصيف وأيضا عملية حساب الجذور التكعيبية. وابتداءً من القرن 12م بدأت كتب الحساب في الشرق الاسلامي تتطرق إلى مسألة حساب الجذور من الدرجة الأعلى وتوصلوا إلى طرق وخوارزميات حسابية جديدة كما عمموا الطرق التقريبية التي كانت مطبقة في عمليتي التجذير والتكعيب. أما رياضيو الغرب الاسلامي فقد عالجوا مسألة حساب الجذور التربعية والتكعيبية وتوصلوا إلى طرق تقريبية تختلف عن تلك التي استعملت في الشرق. كما قدموا براهين لشرح الوسائل التي سمحت لهم بصياغة هذه الخوارزميات (Harbili, A., 2011). إلى جانب ذلك تناولوا في الفصل الخاص بالجذور العمليات الحسابية الخمسة (جمع، طرح، ضرب، قسمة وتجذير) على هذا النوع من الأعداد واستعملوا ترميزا خاصا لهذه العمليات. وهذه بعض الأمثلة (مخطوطة الجزائر، رقم 2712):



-ضرب جذر تسعة في جذر جذر ستة عشر-



قسمة جذر خمسة وجذر تسعة على جذر ثمانية

بعض الخوارزميات الحسابية المعروفة في التقليد الرياضي العربي للغرب الاسلامي

خوارزمية تربيع الأعداد

تسمى هذه الخوارزمية "**الضرب بنصف تنقيل**" لأنها تعتمد على نقل عدد من مرتبته بنصف مرتبة يسارا. نقدم في هذا الجزء من المقال مراحل هذه الخوارزمية وكذا مراحل

عملية التجذير كما شرحها الرياضي سعيد بن محمد العقباني التلمساني (ت. 1408) (Harbili, A., 1997, 253-255, 323-324).

مثال حساب مربع 123

المرحلة 1: نكتب العدد على الشكل 1 ∴ 2 ∴ 3

المرحلة 2: نربع العدد 1 الذي في رتبة المئات ونضع الناتج فوقه:

1
1 ∴ 2 ∴ 3

المرحلة 3: نضاعف هذا العدد 1 ونضع الناتج تحت النقاط الثلاثة التي على يساره:

1
1 ∴ 2 ∴ 3
2

المرحلة 4: نضرب العدد 2 الذي في رتبة العشرات في الاثنين التي تحت الثلاثة نقاط ونضع الناتج فوق هذه النقاط. ثم نضربه في نفسه ونضع الناتج فوقه مباشرة:

1 4 4
1 ∴ 2 ∴ 3
2

المرحلة 5: نضاعف العدد 2 الذي فرغنا من الحساب به في المرحلة السابقة ونضع الناتج تحته. ثم نزيح السطر الأسفل مرتبة نحو اليمين:

1 4 4 → **1 4 4**
1 ∴ 2 ∴ 3 → 1 ∴ 2 ∴ 3
2 4 → 2 4

المرحلة 6: نضرب العدد 3 الذي في رتبة الآحاد في العددين الموجودين في السطر الأسفل ونضع الناتج فوق سطر العدد الأول (أي 123) كل في العمود المناسب. ثم نضرب العدد 3 في نفسه ونضع الناتج فوقه مباشرة:

1
6
1 4 4 2 9
1 ∴ 2 ∴ 3
2 4

المرحلة 7: نقوم بجمع نتائج العمليات الجزئية السابقة أي كل الأعداد المتواجدة فوق السطر الأساسي الذي يحتوي على العدد 123. ونكتب الناتج في الأعلى:

1 5 1 2 9
1
6
1 4 4 2 9
1 ∴ 2 ∴ 3
2 4

ومنه مربع 123 هو 15129

خصائص الخوارزمية: تعتمد هذه الخوارزمية على مفهومين يقوم على أساسهما الحساب الهندي: الأول أن النظام عشري والثاني أنه وضعي. فإذا كتبنا العدد 123 كما يلي: $123 = 3 + 20 + 100$

وبوضع: a+b+c=123 حيث $a = 100,\ b = 2 \times 10,\ c = 3$

نستنتج أن الصيغة الرياضياتية لخوارزمية الضرب بنصف تنقيل هي:

$$(a + b + c)^2 = a^2 + (2a + b)b + (2a + 2b + c)c$$

خوارزمية التجذير

مثال حساب الجذر التربيعي للعدد 15129

المرحلة 1: تعيين مراتب جذر العدد. أي تعيين عدد الأرقام التي يتركب منها هذا الجذر. التقنية المستعملة هي كما يلي:

نكتب العدد ونسمي المرتبة الأولى يمينا "جذر" والمرتبة الموالية لها يسارا "لا جذر" والموالية بعدها "جذر" وبعد هذه الأخيرة "لا جذر" وهكذا إلى أن نستنفد كل أرقام العدد. بالنسبة لهذا المثال نسند للرقم 9 وهي الآحاد اسم "جذر" وللرقم 2 وهي العشرات "لا جذر" وللرقم 1 أي المئات "جذر" وللرقم 5 وهي الآلاف "لا جذر" وللرقم 1 وهي عشرات الألف "جذر". وهكذا يكون لدينا ثلاثة أرقام ذكرنا فيها كلمة "جذر" فنستنتج أن عدد مراتب جذر 15129 هو ثلاثة ونكتبه كما يلي: $\sqrt{15129} = \overline{a_2 a_1 a_0}$

نضع مثلا مربعا ممتلئا باللون الأخضر فوق هذه المراتب التي نكتبها هي الأخرى باللون الأخضر لتمييزها كما يلي: ■ ■ ■ / 1 5 1 2 9

ثم نقوم بتحديد قيم الأرقام i على الترتيب التالي:

المرحلة 2: نبحث عن أكبر رقم a_2 يحقق $(a_2)^2 \leq 1$

نجد $a_2 = 1$. ثم نقوم بالعمليات الحسابية التالية:

نضع هذا العدد مكان المربع الأول يسارا ثم نطرح مربعه من الواحد الذي تحته ونضع الباقي مكان هذا الأخير. وبعدها نضاعفه ونكتب الناتج باللون الأحمر تحت المرتبة الموالية يمينا كما يلي:

1 ■ ■ / 5 1 2 9 / 2

المرحلة 3: نبحث عن أكبر رقم a_1 يحقق: $(20 + a_2)a_2 \leq 51$

نجده يساوي 2 نضعه مكان المربع الثاني يسارا ونجري العملية التالية: $51 - 2 \times 2 = \big((50 - 20 \times 2) + 1\big) - 2 \times (22 \times 2)$ كما يلي:

1 2 ■ / 0 5 1 2 9 / 2 → 1 2 ■ / 0 1 1 2 9 / 2 → 1 2 ■ / 0 0 7 2 9 / 2

المرحلة 4: نضاعف العدد 2 الذي وجدناه في المرحلة الثالثة ونكتب الناتج بالأحمر في السطر الأسفل وفي نفس العمود. بعدها نسحب السطر الأسفل مرتبة نحو اليمين هكذا: 1 2 ■ / 0 0 7 2 9 / 2 4 ⟶ (السحب) 1 2 ■ / 0 7 2 9 / 2 4

المرحلة 5: نبحث عن أكبر رقم a_0 يحقق: $(240 + a_0)a_0 \leq 729$ نجده يساوي 3. نكتبه مكان المربع الأخير أي فوق التسعة ثم نجري عملية الطرح التالية:

$((((800 - 3 \times 200) + 20) - 3 \times 40) + 9) - 3 \times 3$

كما يلي: 1 2 3 / 0 0 7 2 9 / 2 4 → 1 2 3 / 0 0 1 2 9 / 2 4 → 1 2 3 / 0 0 0 9 / 2 4

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ \rightarrow & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 2 & 4 \end{matrix}$$

من الملاحظ أن هذه الخوارزمية تعتمد على نفس المفاهيم التي ذكرناها في عملية الضرب بنصف تنقيل. وهي أيضا تطبق نفس مراحل الحساب التي كتبناها سابقا كما يلي:

$$(a+b+c)^2 = a^2 + (2a+b)b + (2a+2b+c)c$$

المضاعف (2) ظهر في المرحلة الثانية من الخوارزمية وقد كتبناه في السطر الأسفل في أقصى اليسار. المضاعف الثاني$(2b)$ كتبناه في المرحلة الرابعة بعدما حددنا قيمة الرقم الثاني. ولو كان جذر العدد يتركب من 4 أرقام لظهر المضاعف (2) وهكذا ... .

الخاتمة:

من خلال دراستنا لمجموعة من النصوص العربية التي تناولت عمليتي الضرب والتجذير لاحظنا أن الطرق الحسابية التي استعملت في الغرب الاسلامي هي تقريبا مماثلة لتلك المعروفة في الشرق الاسلامي. ولكن التقليد الرياضي للغرب الاسلامي يحتفظ بخصوصيته لأنه يتميز بكثرة خوارزميات عملية الضرب التي يصل عددها 15. وباستعمال البراهين من أجل اثبات صحة الخوارزميات والطرق الحسابية.

المراجع

1. أحمد سليم سعيدان (1997)، الأعداد وعلم الحساب، في: موسوعة تاريخ العلوم العربية، الجزء الثاني الرياضيات والعلوم الفيزيائية، ترجمة عربية تحت إشراف رشدي راشد، مركز دراسات الوحدة العربية، سلسلة تاريخ العلوم العربية (4)، بيروت.
2. ابن النديم، الفهرست، دار المعرفة، بيروت، ص. 383-396.
3. أحمد جبار& يوسف ڤرڤور (2013)، "الترقيم الرومي في مؤلفات أندلسية ومغاربية مع تحقيق رسالة لابن البنا"، مجلة سهيل 12.
4. الاقليدسي (1984)، الفصول في الحساب الهندي، تحقيق أحمد سليم سعيدان، معهد التراث العلمي العربي، منشورات جامعة حلب، الطبعة الثانية.

5. ابن الطاهر البغدادي (1985)، التكملة في الحساب، تحقيق أحمد سليم سعيدان، معهد المخطوطات العربية، المنظمة العربية للتربية والثقافة والعلوم، الكويت، ط.1.

6. نصير الدين الطوسي (1967)، جوامع الحساب بالتخت والتراب، تحقيق أحمد سليم سعيدان، مجلة الأبحاث 20 (1967)، ص. 91-163.

7. الحصار، كتاب البيان والتذكار، مخ. الرباط، رقم Q917.

8. الحصار، كتاب البيان والتذكار للحصار، مخ. مكتبة بنسلفانيا، رقم LJS 293

9. الحصار، كتاب الكامل في صناعة العدد، مخ. مراكش، رقم 313.

10. ابن منعم (2006)، فقه الحساب، تحقيق درس لمرابط، دار الأمان، الرباط.

11. مخ. الجزائر، المكتبة الوطنية، رقم 2712.

12. مخطوطة مفاتيح العلوم : https://www.alukah.net/library/0/135009

1. Allard, A., (1992), Muḥammad Ibn M⅄sā al-Khwārizmī, *Le calcul indien (Algorismus)*, Paris, Société des Etudes Classiques, Bruxelles & Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard.

2. Proust, C. (2004), Tablettes mathématiques de Nippur (Mésopotamie, début du deuxième *millénaire avant notre ère), Reconstitution du cursus scolaire*, Thèse de Doctorat, Université Paris 7 –Denis Diderot UFR G.H.S.S..

3. Chabert, J.L. & Barbin, E. & Guillemot, M. & Pajus, A. M. & Borowczyk, J. & Djebbar, A. & Martzloff, J.C. (1999), A history of algorithms from the pebble to the microchip, English translation, Springer Verlag, Jean-Luc Chabert (ed.).

4. Dahan-Dalmedico, A. & Peiffer, J. (1986), Une histoire des mathématiques, Routes et dédales, Éditions du Seuil,

5. Harbili, A. (1997), L"enseignement des mathématiques à tlemcen à travers le commentaire d'al-ʿUqbānī (m. 1408) au Tallkhīṣ d'ibn al-Bannā (m. 1321), Magister d'histoire des mathématiques, E. N. S. Kouba, Alger.

6. Harbili, A. (2006), Le Takhṣ✚✹ d'al-Ghurb✚ : Un commentaire inédit du Talkh✚✹ d'Ibn al-Bann▣, Actes du huitième colloque maghrébin sur l'histoire des mathématiques arabes, (Tunis, 18-20 Décembre 2004), Tunis, Publication de l'Association Tunisienne des Sciences Mathématiques, pp. 199-216.

7. Harbili, A. (2011), Les procédés d'approximation dans les ouvrages mathématiques de l'Occident musulman, Revue *LIULL, Journal de la Société Espagnole d'Histoire des Sciences et Techniques*, Vol. 34, n°73, 39-60.